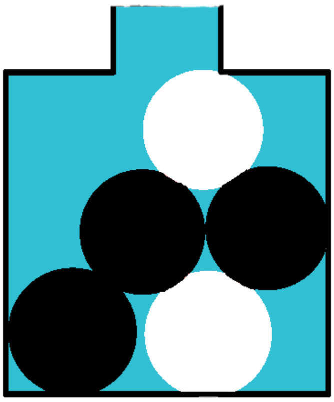
Chapitre : ***Variables aléatoires***

x_i	x_1	x_2	…….	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	……….	p_n



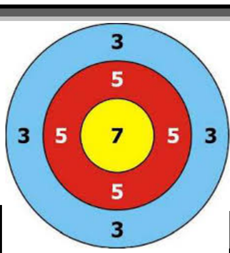
3 noires et 2 blanches indiscernables au toucher .

On tire au hasard , une à une toutes les boules sans les remettre

R variable aléatoire correspondant au rang de la première boule blanche tirée .

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i \quad ??$$

****



$p(X=k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} \quad , \quad k \in \{0,1,\ldots\ldots,n\}$

$E(x) = n\,p \;\; \& \;\; v(x) = n\,p\,(1-p)$

Professeur : Aloui Fahem - 4ième Sc.Exp 1&2 - BAC 2K20 Bonne chance

Variables aléatoires

1°. VARIABLES ALÉATOIRES SUR UN ENSEMBLE PROBABILISÉ FINI

1°. 1- Aléa numérique et loi de probabilté

Activité

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2 , indiscernables au toucher .
On tire simultanément deux boules de l'urne et on considère les évènements suivants :

A « Tirer deux boules numérotées 4 »

B « Tirer deux boules portant des numéros différents »

C « Tirer deux boules portant le même numéro »

D « Tirer deux boules numérotées -2 »

1°./ La probabilité de chacun des évènements ci-dessus est :

$$p(A)=\frac{CardA}{CardE}=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0.1 \qquad p(B)=\frac{CardB}{CardE}=\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=0.6$$

$$p(C)=\frac{CardC}{CardE}=\frac{C_2^2+C_3^2}{C_5^2}=0.4 \qquad p(D)=\frac{CardD}{CardE}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$$

2°./ Soit l'application $X:E\rightarrow IR$ telle que pour toute partie de deux boules tirées $\{b_i , b_j\}$ associe le réel somme des deux numéros : $i+j$ donc les valeurs prises par X sont : -4 , 2 et 8 .

On note $X(E)=\{-4,2,8\}$: Ensemble des valeurs prise par X .

Déterminons $p(X=x_i)$ pour tout x_i appartenant à $X(E)$

$p(X=-4)=p(D)=0.3$; $p(X=2)=p(B)=0.6$; $p(X=8)=p(A)=0.1$

On présente les résultats ci-dessus dans un tabeau appelé tableau de loi de probabilité de X .

x_i	-4	2	8
$p(X=x_i)$	0.3	0.6	0.1

Définition et conséquence

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini .

- On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X:E\rightarrow IR$
- On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X , l'application $p_x : X(E)\rightarrow[0,1]$, $x_i \mapsto p(X=x_i)$
- Si $X(E)=\{x_1,x_2,.........,x_n\}$ alors $\sum_{i=1}^{n}p(X=x_i)=1$

Application 1

Un sac contient six jetons blanc et quatre jetons rouges indiscernables au toucher .
On tire simultanément trois jetons et on considère X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de jetons blanc restant dans le sac .
Déterminer la loi de probabilité de X .

Activité 2 page 83

1°. 2 - Espérance , variance et écart - type d'une variable aléatoire

Définition 1

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,on appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$.

Propriété

X et Y deux variables aléatoires sur E et $\alpha \in IR$

$E(\alpha X) = \alpha E(X)$ et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

Application 2

On tire au hasard un échantillon de trois articles d'une boite contenant 12 articles dont trois sont défectueux , calculer l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux auquel on peut s'attendre .

L'univers est l'ensemble des combinaisons de trois articles de la boite donc $\text{card}E = C_{12}^{3} = 220$.

Soit X l'aléa numérique qui à chaque échantillon associe le nombre d'articles défectueux qu'il contient alors on a : $X(E)=\{0,1,2,3\}$, $p(X=0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{220}$, $p(X=1)=\frac{C_3^1 C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{108}{220}$, $p(X=2)=\frac{C_3^2 \times C_9^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$ et $p(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$

d'où

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

et $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p_i = 0\times\frac{84}{220}+1\times\frac{108}{220}+2\times\frac{27}{220}+3\times\frac{1}{220} = 0.75$

On en déduit que , sur un échantillon de 3 articles, le nombre d'articles défectueux est 0.75 soit 1 sur 4

Espérance et jeux

Pour une épreuve d'un jeu de hasard , on dit que :

Le jeu est avantageux (gagnant) ou l'épreuve est favorable si $E(X) \succ 0$

Le jeu est désavantageux (perdant) ou l'épreuve est défavorable si $E(X) \prec 0$

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$

Exemple

Un joueur lance un dé équilibré et s'intéresse au nombre indiqué sur la face supérieur .
Il gagne en dinars la somme égale à ce nombre s'il est premier .
Il perd en dinars la somme égale à ce nombre s'il n'est pas premier .

Q: Déterminer la loi de probabilité du gain algébrique puis calculer $E(X)$ et interpréter .

R: On a $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ alors $X(E)=\{-6,-4,-1,2,3,5\}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} x_i = \frac{1}{6}(-6-4-1+2+3+5) = \frac{-1}{6}$$

L'espérance du jeu est $E(X) = \frac{-1}{6} \prec 0$ donc l'épreuve est défavorable .

Définition 2

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E((X - E(X))^2)$ ou encore $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

et écart - type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Application 3

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie mal équilibrée et telle que :

La probabilité d'obtenir face est trois fois celle d'obtenir pile .

On note X l'aléa représentant le nombre de faces obtenues lors d'un lancer de trois fois de la pièce .

Calculer la variance et l'écart type de X .

On a $\text{card}E = 2^3 = 8$; $E = \{ FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP \}$ donc $X(E) = \{ 0,1,2,3 \}$

d'ou $p(X=0) = (\frac{1}{4})^3$, $p(X=1) = 3 \times \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^2$, $p(X=2) = 3 \times (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4}$ et $p(X=3) = (\frac{3}{4})^3$

x_i	0	1	2	3	total
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1
$x_i\, p_i$	0	$\frac{9}{64}$	$\frac{54}{64}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{144}{64}$
$x_i^2\, p_i$	0	$\frac{9}{64}$	$\frac{108}{64}$	$\frac{243}{64}$	$\frac{360}{64}$

ainsi $E(X) = \sum_i x_i\, p_i = \frac{144}{64}$ et $E(X^2) = \sum_i x_i^2\, p_i = \frac{360}{64}$

et par suite $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2304}{4096} = 0.5625$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0.75$

1°. 3 - Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E

On appelle fonction de répartition de X , l'application définie par : $F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$x \mapsto p(X \leq x)$

Exemple Prenons le tableau de loi de probabilité de l' **Application 1**

x_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

d'après la définition , on a alors :

si $x \in]-\infty, 3[$, $F(x) = p(X \le x) = 0$

si $x \in [3, 4[$, $F(x) = p(X \le x) = p(x=3) = \frac{1}{6}$

si $x \in [4, 5[$, $F(x) = p(X \le x) = p(x=3) + p(x=4) = \frac{2}{3}$

si $x \in [5, 6[$, $F(x) = p(X \le x) = p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) = \frac{29}{30}$

si $x \in [6, +\infty[$, $F(x) = p(X \le x) = p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) = 1$

$$F : IR \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 3[\\ \frac{5}{30} & \text{si } x \in [3,4[\\ \frac{20}{30} & \text{si } x \in [4,5[\\ \frac{29}{30} & \text{si } x \in [5,6[\\ 1 & \text{si } x \in [6,+\infty[\end{cases}$$

ainsi la fonction de répartition F de X est définie comme indiqué ci-contre :

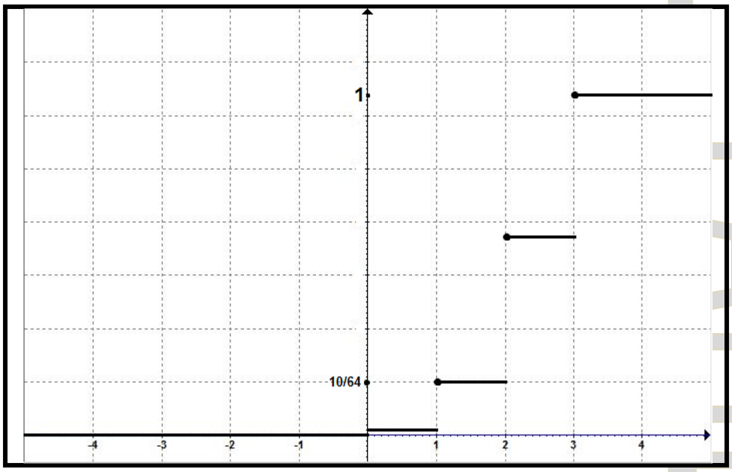
<u>Repésentation ghraphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire</u>

Comme exemple , prenons le tableau de la loi de probabilité de l'**<u>Application 3</u>**

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

La fonction de répartition F de la variable aléatoire X et sa représentation sont comme suit :

$$F : IR \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{64} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{10}{64} & \text{si } x \in [1,2[\\ \frac{37}{64} & \text{si } x \in [2,3[\\ 1 & \text{si } x \in [3,+\infty[\end{cases}$$



<u>Activité 1 page 86</u>

<u>1°. 4 - Loi binomiale</u>

<u>Définition</u> Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques , indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec et soit p la probabilité de l'évènement succès .

La loi de probabilité de La variable aléatoire X associant le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves est donnée par : $p(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots\ldots, n\}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n , p) et on a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Activité 1 page 87

1°./ On note par S l'évènement : « le joueur atteint la cible »

Le nombre de tirs ou épreuves identiques est $n = 2$, $p = p(S) = 0.9$ et $X(E) = \{0,1,2\}$

a/ X suit une loi binomiale de paramètre $n = 2$ et $p = 0.9$

d'où $p(X = k) = C_2^k\, p^k\,(1-p)^{2-k}$, $k \in \{0,1,2\}$, ainsi on a :

$p(X=0) = C_2^0\,(0.9)^0\,(1-0.9)^2 = 0.01$

$p(X=1) = C_2^1\,(0.9)^1\,(1-0.9)^1 = 0.18$

$p(X=2) = C_2^2\,p^2\,(1-p)^0 = 0.81$

Le tableau de loi de probabilité est alors comme suit :

x_i	0	1	2
p_i	0.01	0.18	0.81

b/ Soit B l'évènement : « le joueur atteint au moins une fois sa cible »

$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p(X=0) = 0.99$

2°./ Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.9$

d'où $p(Y = k) = C_{10}^k\, p^k\,(1-p)^{10-k}$; $k \in \{0,1,......,10\}$.

On note les évènements :

A : « le joueur réalise neuf succès »

B : « le joueur réalise au moins un succès »

alors on a : $p(A) = p(Y=9) = C_{10}^9\,(0.9)^9\,(1-0.9)^1 \simeq 0.39$

et $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p(Y=0) = 1 - C_{10}^0\,(0.9)^0\,(1-0.9)^{10} = 0.99$

Exercice N°3 Bac 2014 contrôle

2°. EXEMPLES DE LOIS CONTINUES

2°. 1- La loi uniforme

Définition Soit un intervalle $[a,b]$ tel que $a \prec b$. La fonction définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

est appelé densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$ et l'application définie par :

$p([c,d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ pour tout $[c,d] \subset [a,b]$ est appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

Conséquences soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ qui suit une loi de probabilité uniforme.

alors on a pour tout $[c,d] \subset [a,b]$

$p(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$	$p(\overline{[c,d]}) = 1 - p([c,d])$	$p(\{c\}) = 0$

Fonction de répartition : La fonction de répartition de X est l'application $F : IR \to [0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x \prec a \\ F(x)=\dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ F(x)=1 & \text{si } x \succ b \end{cases}$$

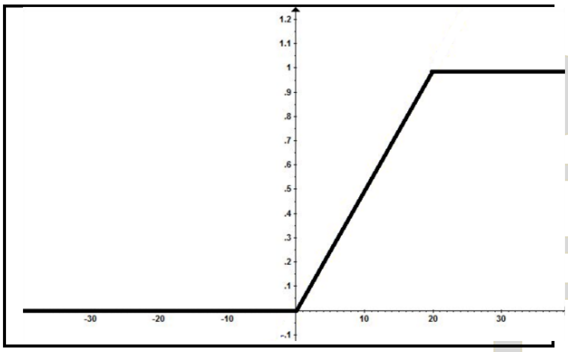
Application

Un bus passe toute les 20 minutes à une station ; on désigne par X le temps d'attente d'une personne à cette station et on suppose que X suit une loi uniforme sur [0 , 20] .

- La probabilité que cette personne attende entre 2 et 5 minutes est : $p(2 \leq X \leq 5) = \dfrac{5-2}{20-0} = 0.15$
- La probabilité que cette personne attende moins de 3 minutes est : $p(0 \leq X \leq 3) = \dfrac{3-0}{20-0} = 0.15$
- La probabilité que cette personne attende plus de 3 minutes est : $p(3 \leq X \leq 20) = \dfrac{20-3}{20-0} = 0.85$
- La fonction de répartition de X est :

$F : IR \to [0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x \prec 0 \\ F(x)=\dfrac{x}{20} & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ F(x)=1 & \text{si } x \succ 20 \end{cases}$$



2°. 2- La loi exponentielle

Définition

Soit $\lambda \in IR_+^*$, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelé densité de la loi exponentielle .
On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda \in IR_+^*$, l'application p définie ainsi :

- $p([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$ pour tout $[c,d] \subset [0, +\infty[$.
- $p([c, +\infty[) = e^{-\lambda c}$ pour tout $[c, +\infty[\subset [0, +\infty[$.

Conséquences

Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle alors on a :

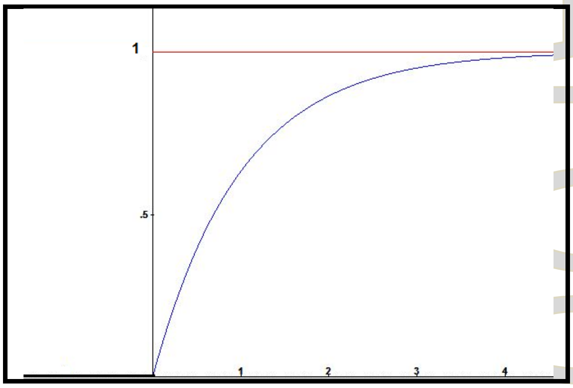
$p(c \le X \le d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$	$p(X \ge c) = e^{-\lambda c}$	$p(\{c\}) = 0$	$p([0,c]) = 1 - e^{-\lambda c}$	$p([c,+\infty[) = 1 - p([0,c])$

Fonction de répartition :

Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ

La fonction de répartition de X est l'application $F : IR \to [0,1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$



Exercice 17 page 96

On a $\lambda = 5.10^{-4}$ donc la fonction densité de loi probabilité est $f(t) = 5.10^{-4}\, e^{-0.0005\,t}$

- La probabilité qu'un robot ait une durée de vie comprise entre 5 et 8 ans est :

$$p(5 \le X \le 8) = e^{-0.0005\times 5} - e^{-0.0005\times 8} \simeq 15.10^{-4}$$

- La probabilité qu'un robot dépasse 5 ans de durée de vie est : $p(X \ge 5) = e^{-0.0005\times 5} = 0.997$

Activité 4 page 92

1°./ Pour $x \ge 0$ on a $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ or $F(1) = 0.85 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda} = 0.85 \Rightarrow \lambda = -\ln(0.15) \simeq 1.9$.

2°./ $p(X \ge 2) = e^{-1.9\times 2} \simeq 0.22$

Exercice N°3 Bac 2009 contrôle et Exercice N°3 Bac 2016 contrôle