$$$______LYCÉE SIDI BOUZID______$$$

Cours de mathématiques :

Chapitre : Equations différentielles

Bac 2k20 *Bonne chance*

Equations différentielles

1°. DÉFINITION

Activité Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$; déterminer une relation entre f' et f.
On a $f(x) = e^{-x}$ donc $f'(x) = -e^{-x}$ d'où $f'(x) = -f(x)$.
ainsi on a $f'(x) = -f(x)$, on dit dans ce cas que $f(x)$ est une solution d'une équation du type $y' = a\,y$, $(a = -1)$; appelée équation différentielle .

Théorème soit a un réel . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$ est l'ensemble des fonctions définies sur IR par $f : x \mapsto k\,e^{a\,x}$, où k est un réel quelconque .

Exemples a/ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 3\,y$ sont les fonctions $f(x) = k\,e^{3x}$, $k \in IR$.

b/ * * L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $5y' + y = 0$ $\left(\Leftrightarrow y' = \frac{-1}{5}\,y\right)$ sont toutes les fonctions définies par $g(x) = \lambda\,e^{-\frac{1}{5}x}$, $\lambda \in IR$.

* * Déterminons la solution vérifiant $y(1) = 2$

on a $g(x) = \lambda\,e^{-\frac{1}{5}x}$ et $g(1) = 2$ $\Rightarrow$ $\lambda = 2e^{\frac{1}{5}}$ et par suite $g(x) = 2\,e^{-\frac{1}{5}(x-1)}$

Théorème soit a un réel non nul . L'équation $y' = a\,y$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0 définie sur IR par $f : x \mapsto y_0\,e^{a\,(x-x_0)}$

Exemple La solution sur IR de l'équation différentielle $y' = 2\,y$ et tel que $y(-1) = \sqrt{2}$ est $f(x) = \sqrt{2}\,e^{2(x+1)}$

Corrigé activité 6 page 168

1° / on a $N'(t) = -\lambda\,N(t)$ donc $N(t) = k\,e^{-\lambda t}$; $k \in IR$
or à $t = 0$, on a $N(0) = N_0$ donc $k\,e^0 = N_0 \Rightarrow k = N_0$ d'où $N(t) = N_0\,e^{-\lambda t}$

2° / Pour $t = T_{0.5}$ on a $N(t) = 0,5\,N_0$ donc $0,5\,N_0 = N_0\,e^{-\lambda T_{0.5}}$ d'où $0,5 = e^{-\lambda T_{0.5}} \Rightarrow T_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

3° /a/ Ona $T_{0.5} = 5730$ or $T_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{0.5}} \simeq 1,2.10^{-4}$

b/ Ona $N(t) = 0,6\,N_0$ donc $N_0\,e^{-\lambda t} = 0,6\,N_0$
d'où $e^{-\lambda t} = 0,6 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,6}{\lambda}$; soit $t = -T_{0.5}\frac{\ln 0,6}{\ln 2} \simeq 4223$ années

Exercice N°4 Bac 2012 Principale

2°. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE $y' = a\,y + b \quad ; a \in IR^*, b \in IR$

Activité a/ Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-2x} + 3$.

Q : Déterminer une relation entre f' et f.

R : On a $f(x) = e^{-2x} + 3$ donc $f'(x) = -2e^{-2x}$ d'où $f'(x) = -2\,f(x) + 6$; ainsi on a : $f'(x) = -2\,f(x) + 6$, on dit que $f(x)$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -2\,y + 6$

b/ Soit g une solution de $y' = -2\,y + 6$ et la fonction $h : x \mapsto g(x) - 3$.

Q : Montrer que h est une solution de $y' = -2\,y$ puis en déduire $g(x)$.

R : g solution de (E) donc $g'(x) = -2g(x) + 6 \Rightarrow h'(x) = -2\,(\,h(x) + 3\,) + 6 \Rightarrow h'(x) = -2\,h(x)$

d'où h est une solution de l'équation différentielle $y' = -2\,y$

donc $h(x) = k\,e^{-2\,x}$, $k \in IR$ et par suite $g(x) = k\,e^{-2\,x} + 3$, $k \in IR$

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b \quad ; \; a \in IR^*, \; b \in IR$

sont les fonctions $f : \mapsto k\,e^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$, $k \in IR$

Si de plus $f(x_0) = y_0$, La fonction $f : x \mapsto (\,y_0 + \dfrac{b}{a}\,)\,e^{a\,(x - x_0)} - \dfrac{b}{a}$ est l'unique solution .

Exemple Donner l'unique solution f de l'équation différentielle $(E) : \sqrt{2}\,y' - 2\,y = 1$ tel que $f(0) = -1$

(E) est équivalente à $y' = \sqrt{2}\,y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (de la forme $y' = ay + b$; $a = \sqrt{2}$ et $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

et on a $f(0) = -1$, soit $x_0 = 0$ et $y_0 = -1$ d'où $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,(1 + e^{\sqrt{2}\,x})$

Corrigé activité 3 page 170

1° / On sait que $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ soit $i(t) = q'(t)$.

2° / On a $U_R + U_C = U_G \Rightarrow Ri(t) + \dfrac{q(t)}{C} = E \Rightarrow Rq'(t) + \dfrac{1}{C}q(t) = E$

3° / On a $Rq'(t) + \dfrac{1}{C}q(t) = E \Rightarrow q'(t) = -\dfrac{1}{RC}q(t) + \dfrac{E}{R}$; (de la forme $y' = ay + b ; y = q(t), a = -\dfrac{1}{RC}$ et $b = \dfrac{E}{R}$)

donc $q(t) = k\,e^{\frac{-1}{RC}t} + E\,C$ où k est une constante $et \; i(t) = q'(t) = \dfrac{-k}{RC}\,e^{\frac{-1}{RC}t}$

4° / On a $i(t) = \dfrac{-k}{RC}\,e^{\frac{-1}{RC}t} \; et \; i(0) = 10 \Rightarrow -\dfrac{k}{RC} = 10 \Rightarrow k = -10RC$ et par suite $i(t) = 10\,e^{\frac{-1}{RC}t}$

Exercice N°4 Bac 2017 Contrôle

3°. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE $y''+w^2\,y = 0 \;\; ; \; w \in IR$

Activité Soit l'équation différentielle (E): $y''+9\,y=0$

Montrons que la fonction $f : x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x) \;\; ; a\in IR, b\in IR$ est une solution de (E) .

on a $f'(x)=3a\cos(3x)-3b\sin(3x)$ donc $f''(x)=-9a\sin(3x)-9b\cos(3x)$

d'où $f''(x)=-9(a\sin(3x)+b\cos(3x))=-9f(x)$

$\Rightarrow \; f''(x)+9\,f(x)=0$

ainsi $f(x)$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Si on suppose de plus que $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0)=\frac{3}{2}$, on trouve $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et par suite

$f : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)$ est l'unique solution de (E) vérifiant $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0)=\frac{3}{2}$

Théorème

Soit w un réel non nul . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+w^2\,y=0$

sont les fonctions définies sur IR par $f(x)=a\sin(wx)+b\cos(wx)$; $a\in IR$, $b\in IR$

Si $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$, La fonction $f : x \mapsto \frac{y_0}{w}\sin(wx)+x_0\cos(wx)$

est l'unique solution de $y''+w^2\,y=0$

Application Donner la solution f sur IR de l'équation différentielle $y''+2\,y=0$; $y(0)=1$ et $y'(0)=\sqrt{2}$

On a $y''+2y=0$ (de la forme $y''+w^2=0$; $w=\sqrt{2}$)

et on a $f(0)=1$ et $f'(0)=\sqrt{2}$, soit $x_0=1$ et $y_0=\sqrt{2}$ d'où $f(x)=\sin(\sqrt{2}x)+\cos(\sqrt{2}x)$

Corrigé exercice N°15 page 177

1°/ On a $(E): y''=2y'$, en posant $z=y'$ alors (E) est équivalente à $z'=2z$

dont l'ensemble des fonctions solutions sont définies par $z=ke^{2x}$, $k\in IR$.

or $z=y'$ donc $y'=ke^{2x}$, $k\in IR$ d'où $y=\frac{k}{2}e^{2x}+\lambda$; $k\in IR$ et $\lambda\in IR$.

2°/ f solution de (E) donc $f(x)=\frac{k}{2}e^{2x}+\lambda$; $k\in IR$ et $\lambda\in IR$

et comme $f'(0)=1$ *et* $f(0)=2$ on trouve $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}$