

« Rappel de cours + deux exercices corrigés 😊 »

Tél 27677722

Facebook : //www.facebook.com/MathTewa

Définition 😊

La fonction Logarithme Népérien est définie sur $]0, +\infty[$ et sur cet intervalle, elle est la primitive, qui prend la valeur 0 au point 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Conséquences 😊

- Log est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$ $(\text{Log})'(x) = \frac{1}{x}$
- $\text{Log} 1 = 0$
- Log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :
 $\text{Log} x = \text{Log} y \Leftrightarrow x = y$
 $\text{Log} x > \text{Log} y \Leftrightarrow x > y$
 $\text{Log} x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
 $\text{Log} x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Théorème 😊

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que

$\forall x \in I, U(x) > 0$.

La fonction: $x \mapsto \text{Log} U(x)$ est dérivable sur I

et a pour fonction dérivée la fonction: $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

www.facebook.com/MathTewa

Propriétés ☺

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$1^\circ) \text{Log}(ab) = \text{Log}a + \text{Log}b$$

$$2^\circ) \text{Log}\left(\frac{1}{b}\right) = -\text{Log}b \quad \text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}a - \text{Log}b$$

$$3^\circ) \text{Log}(a^r) = r \cdot \text{Log}a \quad \text{Log}\sqrt{a} = \frac{1}{2} \text{Log}a \quad \text{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{Log}a$$

Limites ☺

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Log}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Log}x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(x+1)}{x} = 1$$

Propriété ☺

La fonction Log est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

Remarque ☺ $\text{Log}e = 1$ avec $e = 2,71828$

Signe de $a \text{Log}x + b$: $a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}$

1er cas: $a > 0$	2ème cas $a < 0$
$\begin{array}{c ccc} x & 0 & e^{-\frac{b}{a}} & +\infty \\ \hline a \text{Log}x + b & - & 0 & + \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} x & 0 & e^{-\frac{b}{a}} & +\infty \\ \hline a \text{Log}x + b & + & 0 & - \end{array}$

Théorème

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I$, $U(x) \neq 0$.

La fonction: $x \mapsto \text{Log} |U(x)|$ est dérivable sur I et a pour fonction dérivée la fonction $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

Théorème

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I$, $U(x) \neq 0$.

Les primitives sur I de la fonction: $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$ sont les fonctions définies sur I par: $x \mapsto \text{Log} |U(x)| + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 😊

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivants 😊

$$\text{Log}(x+1) < \text{Log}(x^2-1)$$

$$\text{Log}(2-x) < 0$$

$$\text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log} x + \text{Log} 2$$

Exercice 2 😊

1)

Etudier les variations de l'application $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$

2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: \text{Log } x < x$

On considère l'application $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x^2 + \text{Log } x}{x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etudier les variations de f .
- Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 2x$.
- Déterminer le point de (C) où la tangente est parallèle à (D).
- Construire la courbe (C).

3°) Déterminer la primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 ; de la fonction f 😊

SOLUTION

Exercice 1 😊

(I): $\text{Log}(x+1) < \text{Log}(x^2-1)$

Soit D l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation (I) est définie.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

d'où $D =]1, +\infty[$.

Pour tout x de D on a:

$$\begin{aligned}
 (I) & \Leftrightarrow x+1 < x^2-1 \\
 & \Leftrightarrow (x+1) - (x-1)(x+1) < 0 \\
 & \Leftrightarrow (x+1)[1 - (x-1)] < 0 \\
 & \Leftrightarrow (2-x)(x+1) < 0
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$(2-x)(x+1)$	$-$	0	$+$	$-$

$$S_{\mathbb{R}} = (]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[) \cap]1, +\infty[=]2, +\infty[$$

$$(I): \text{Log}(2-x) < 0$$

Soit D l'ensemble des réels x sur lesquels l'inéquation (I) est définie.

$$x \in D \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{d'où } D =]-\infty, 2[.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } D \text{ on a: } (I) \Leftrightarrow 2-x < 1$$

$$\Leftrightarrow -x < -1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} =]1, +\infty[\cap]-\infty, 2[=]1, 2[$$

$$(I): \text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log}x + \text{Log}2$$

Soit D l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation (I) est définie.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-1) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } D =]\frac{1}{3}, +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } D \text{ on a: } (I) \Leftrightarrow \text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log}2x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-x \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-3x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 1[\cap]\frac{1}{3}, +\infty[=]\frac{1}{3}, 1[$$

Exercice 2

1°) g est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \text{Log}x}{x^2} = \frac{1 - \text{Log}x}{x^2}$$

Tableau de variation de g :

x	0	e	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$-\infty$		$\frac{1}{e}$	0

Le tableau de variation de g prouve que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) \leq \frac{1}{e} < 1$

d'où $\frac{\text{Log}x}{x} < 1$ c'est à dire $\text{Log}x < x$ pour tout x de \mathbb{R}_+^*

2°) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 2x + \frac{\text{Log}x}{x}$

f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 2 + \frac{1 - \text{Log}x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \text{Log}x}{x^2}$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \quad \text{Log}x < x \Leftrightarrow -\text{Log}x > -x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 - \text{Log}x > 2x^2 - x + 1$$

www.facebook.com/MathTewa

Le trinôme $2x^2 - x + 1$ est strictement positif pour tout réel x d'où
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 2x^2 + 1 - \text{Log} x > 0$ ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) > 0$.

Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - 2x = \frac{\text{Log} x}{x}$

x		1	$+\infty$
$f(x) - 2x$		0	$+$
Position relative de (C) et D		(C) est au dessous de D	(C) est au dessus de D

c) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse x .

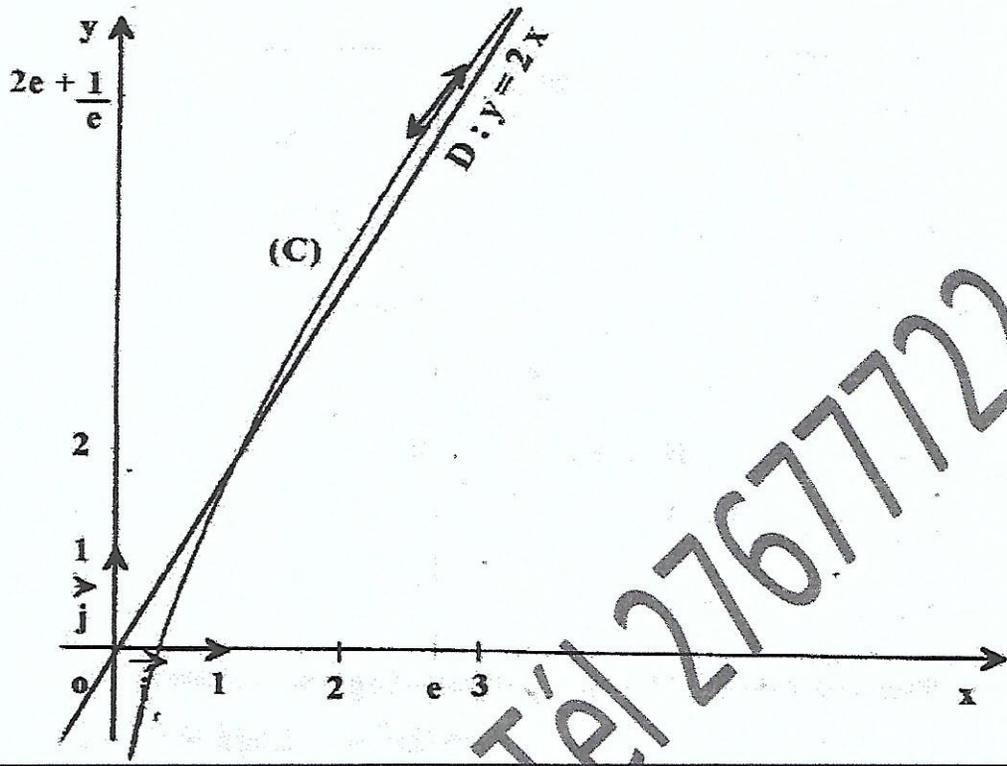
$(T) \parallel D \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1 - \text{Log} x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \text{Log} x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Il existe alors une seule tangente à la courbe (C) parallèle à la droite D d'équation $y = 2x$ au point $E(e, 2e + \frac{1}{e})$.

d) La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log} x}{x} = 0$ ce qui prouve que la droite $D: y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

www.facebook.com/MathTewa



www.facebook.com/MathTewa

Oueslati Aymen Tél 27677722