Résumé : *Déplacements - Antidéplacements*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème :

Toute symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées.
(On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation)

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.
(On dit que la composée de deux symétries orthogonales conserve l'orientation)

Définition : *"Déplacement et antidéplacement"*

- On appelle **déplacement** toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
- On appelle **antidéplacement** toute isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème :

Une isométrie est un déplacement, si et seulement si, elle est la composée de deux symétries orthogonales.
Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales.

Le tableau ci-dessous donne la classification des isométries en déplacements ou antidéplacements.

Identité	Déplacement
Rotation	Déplacement
Translation	Déplacement
Symétrie orthogonale	Antidéplacement
Symétrie glissante	Antidéplacement

Théorème :

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Théorème :

Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Théorème :

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

Théorème :

Soit f un déplacement et A, B, C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Si A', B', C' et D' sont les images respectives par f des points A, B, C et D, alors

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right)\ [2\pi]$.

En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$, on dit que f est un déplacement d'angle θ.

Corollaire 1 :

Soit f un déplacement d'angle θ.
Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une translation.
Si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une rotation d'angle θ.

Corollaire 2 :

- Si f est un déplacement d'angle θ et g est un déplacement d'angle θ', alors $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.
- Si f est un déplacement d'angle θ, alors f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.

Théorème :

La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation

$t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

Théorème :

La composée de deux rotations r et r' d'angles θ et θ' et de centres respectifs O et O' est soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul.
Si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur non nul.
Si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Théorème :

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est une rotation d'angle θ.

Théorème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z'=z+b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.

Théorème :

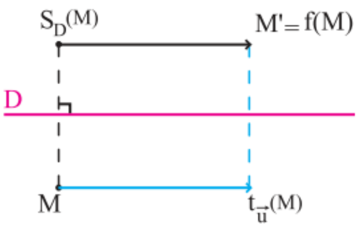
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une rotation d'angle non nul θ et de centre I, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que
$z'=az+b$, avec $a=e^{i\theta}$, $a\neq 1$ et $z_I=\dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Théorème :

Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Théorème :

Soit f une symétrie glissante.
Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f=t_{\vec{u}}\circ S_D=S_D\circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.



Vocabulaire

On dit que D est l'axe de la symétrie glissante et $\vec{u}$ son vecteur.
L'axe et le vecteur d'une symétrie glissante sont ses éléments caractéristiques.

Propriété :

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D,
M un point d'image M' par f.
- Le milieu de $[MM']$ appartient à D.
- Si M est un point de D , alors $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.
- $f\circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$.