Résumé : *Nombres complexes*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

1) L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2) Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté $\boldsymbol{i}$, tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
3) L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
4) Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique : $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe z. a est **la partie réelle** de z, notée $\boldsymbol{Re(z)}$, b est **la partie imaginaire** de z notée $\boldsymbol{Im(z)}$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

- Si $b = 0$, z est réel.
- Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Conséquences :

Soit z et z' deux nombres complexes.

1) z est réel ssi $Im(z) = 0$.
2) z est imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$.
3) $z = 0$ ssi $Im(z) = Re(z) = 0$.
4) $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

Définition : *"Conjugué d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.
On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

2) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

3) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

4) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$

5) $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)} = \frac{1}{(\overline{z'})^n}$, $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

6) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

7) $z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$

8) $z \cdot \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$

9) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

10) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Définition : *"Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur"*

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(a,b)$ un point du plan.

- On appelle **affixe** de M, le nombre complexe noté $aff(M)$ ou z_M tel que : $aff(M) = a + ib$.

  Le nombre complexe $a + ib$ est dit aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on le note $aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$ ou $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- $M(a,b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1) $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

2) $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\, aff(\vec{u}) + \beta\, aff(\vec{v})$ pour tous réels α et β.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel.

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaire pur.

Définition : *"Module d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|-z| = |z|$
3) $|\bar{z}| = |z|$
4) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
5) $|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$
6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$
7) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
8) $z\bar{z} = |z|^2$
9) $|kz| = |k||z|, k \in \mathbb{R}$

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

Alors : $AB = |z_B - z_A|$

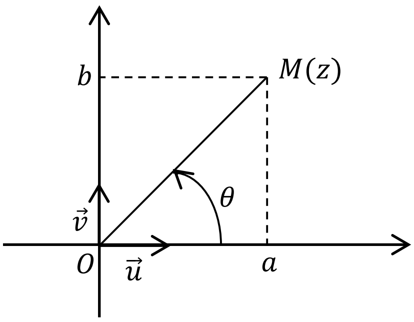
Définition : *"Argument d'un nombre complexe"*

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$z = a + ib$ (a et b sont des réels) est un nombre complexe non nul d'image M.

On appelle **argument** de z et on note $arg(z)$, toute mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

$arg(z) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi] \equiv [2\pi]$



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1) $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z) [2\pi]$
2) $arg(-z) \equiv \pi + arg(z) [2\pi]$
3) Si $k > 0$, alors $arg(kz) \equiv arg(z) [2\pi]$
4) Si $k < 0$, alors $arg(kz) \equiv \pi + arg(z) [2\pi]$
5) $arg(z \cdot z') \equiv arg(z) + arg(z') [2\pi]$
6) $arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z) [2\pi]$
7) $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z) [2\pi]$
8) $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z') [2\pi]$

Théorème :

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $z = a + ib$ et θ un argument de z. Alors : $\boldsymbol{a = |z| \cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = |z| \sin\theta}$ ou encore : $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$

On a alors : $\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)}$

Définition : *"Forme trigonométrique d'un nombre complexe"*

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture de z sous la forme $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $[|z|, \theta]$ où θ désigne un argument de z est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de z.

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \theta]}$$

$|z|$ et θ sont les **coordonnées polaires** du point $M(z)$.

Propriétés :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

$$\boldsymbol{(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) [2\pi]}.$$

En particulier, si A, B, C et D sont quatre d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors :

$$\boldsymbol{\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]}.$$

Conséquence :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta [2\pi]$.

Notation :

Pour tout réel θ, on note $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

Conséquences :

- $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i\pi} = -1$.
- Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$.
- Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Propriétés :

Soit θ et θ' deux réels.

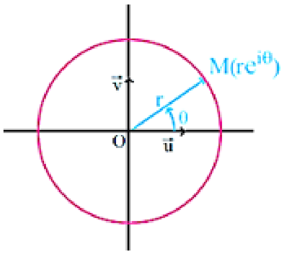
$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème :

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ où $r = |z|$ et $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

L'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ est appelée la **forme exponentielle** de z.

$$\boldsymbol{re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)}$$



Théorème :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ces solutions sont appelés les racines n^ièmes de l'unité.

Théorème :

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et un entier naturel $n \geq 2$.

L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par : $z_k = r\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$.

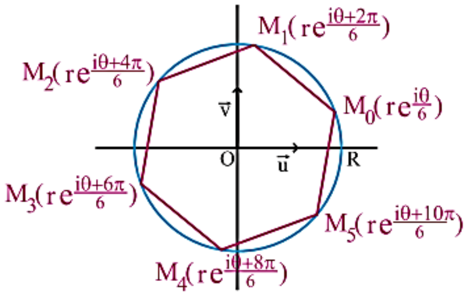
Ces solutions sont appelés les racines n^ièmes du nombre complexe a.

Conséquence :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = |a|e^{i\theta}$



Théorème :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$. Appelé le discriminant de l'équation (E).

1) Si $\Delta = \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $\boldsymbol{z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}}$
2) Si $\Delta \neq \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes :

$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$ avec δ est une racine carrée de Δ.

Conséquences :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2+bz+c=0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.
Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors :
$\boldsymbol{az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)}$; $\boldsymbol{z_1+z_2=-\frac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{z_1\cdot z_2=\frac{c}{a}}$.

Comment déterminer les racines carrées d'un nombre complexe ?

Soit $Z=a+ib$ et $z=x+iy$ sont deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne. Alors :

z est une racine carrée de $Z \Leftrightarrow z^2=Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy=b \end{cases}$

Remarque :

Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe, car il ne s'agit pas d'une fonction sur $\mathbb{C}$.

Théorème :

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.
Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$.
Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z)=(z-z_0)g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_nz^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_0$, avec $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ sont des nombres complexes.

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ on a : $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta}$ et $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta}$

Formule de Moivre :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$

Remarque :

En transformant une expression contenant une puissance de cos x ou de sin x sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a ***linéarisé*** *l'expression donnée.*