

Résumé : Suites réelles  
 Niveau : Bac mathématiques  
 Réalisé par : Prof. Benjeddou Saber  
 Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème :

Soit  $(u_n)$  une suite réelle et  $l$  finie ou infini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, \text{ si et seulement si, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l.$$

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.

Théorème :

Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers un réel  $a$ .

- S'il existe un entier naturel  $N_0$  tel que  $0 \leq u_n$  pour tout  $n \geq N_0$ , alors  $0 \leq a$ .
- S'il existe un entier naturel  $N_0$  tel que  $u_n \leq 0$  pour tout  $n \geq N_0$ , alors  $a \leq 0$ .

Conséquence :

Soit  $N_0$  un entier naturel et  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite.

On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $m \leq u_n \leq M$  pour tout  $n \geq N_0$ .

Si la suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $a$ , alors  $m \leq a \leq M$ .

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## Limite d'un quotient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	$0$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## Théorème :

Soit  $q$  un réel.

- Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ .
- Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- Si  $q \leq -1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  n'existe pas.

## Théorème :

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique définie par  $u_n = q^n$ ,  $n \geq 0$ , où  $q$  est un réel non nul.

- Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- Si  $q \leq -1$ , alors la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite.
- Si  $q = 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est constante.

## Théorème :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle ouvert  $I$  et  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$  et soit  $l \in I$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ .

## Théorème :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  (fini ou infini) et si  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = L$  (fini ou infini), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$ .

## Théorème :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes respectivement vers deux réels  $a$  et  $b$ .

S'il existe un entier naturel  $N_0$  tel que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq N_0$ , alors  $a \leq b$ .

### Théorème :

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites et soit  $a$  un réel.

On suppose qu'il existe un entier  $N_0$  tel que  $v_n \leq u_n \leq w_n$  pour tout  $n \geq N_0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

### Corollaire :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

On suppose qu'il existe un entier  $N_0$  tel que  $0 \leq |u_n| \leq v_n$  pour tout  $n \geq N_0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Théorème :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

- S'il existe un entier  $N_0$  tel que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq N_0$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- S'il existe un entier  $N_0$  tel que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq N_0$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

### Théorème :

Soit  $(u_n)$  une suite définie pour  $n \geq 0$ .

Si la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel  $a$  et  $u_n \leq a$  pour tout  $n \geq 0$ .

Si la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel  $b$  et  $u_n \geq b$  pour tout  $n \geq 0$ .

### Théorème :

- Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .

- Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .

### Théorème :

Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $n \geq 0$  où  $f$  est une fonction.

Si la suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $a$  et si la fonction  $f$  est continue en  $l$ , alors  $l = f(l)$ .

Définition : "Suites adjacentes"

Deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :

- ❖ Pour tout  $n \geq 0$  :  $u_n \leq v_n$ .
- ❖ La suite  $(u_n)$  est croissante et la suite  $(v_n)$  est décroissante.
- ❖ La suite  $(u_n - v_n)$  converge vers 0.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.