Lycée Jammel 3 Lycée M. Hayet	**Primitives** *Classes 4M + 4Sc.exp*	Prof :Afli Ahmed

I. Primitive d'une fonction continue :

Activité : Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = 3x² + 4x – 1 .
a. Déterminer, si elle existe, une fonction F définie et dérivable sur IR et vérifiant F'= f.
b. F est-elle unique ? Justifier.
c. Déterminer la solution F vérifiant : F(0) = 1.

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

……

……

Une fonction ***F*** est une **primitive** d'une fonction ***f*** sur un intervalle *I* **signifie** $\begin{cases} * \ F \text{ est } \underline{\text{dérivable}} \text{ sur } I \\ * \ \forall x \in I,\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

Activité : Soit f la fonction définie sur I = $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par f(x) = tg²x
a) Déterminer une primitive F de f sur I.
b) Soit G la fonction définie sur I par G(x) = F(x) + k , où k est une constante réelle.
Vérifier que G est une primitive de f sur I.
c) Pour quelle valeur de k a-t-on G(0) = 0 ?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

……

Théorème : Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I alors :
- ♣ Toute autre fonction G définie sur I par G(x) = F(x) + k (k est un réel) est aussi une primitive de f sur I.
- ♣ Pour tous x_0 ∈I et y_0 ∈IR, il existe une **unique** primitive G de f sur I vérifiant : G(x_0) = y_0.

Conséquence :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; si F et G sont deux primitives de f sur I alors **F – G** est une fonction constante sur I.

Exercice : Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = $x^2 + 1 + \cos(x)$
Donner la primitive F de f tel que F(0) = -2

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Théorème : Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une **primitive** **F** sur I.

II. Primitives des Fonctions usuelles

♣ *Dans le tableau ci-dessous f designe une primitive de f sur l'intervalle I*

f(x)	***Intervalle I***	***F(x)***
a		
x		
ax+b		
x^n ; $n\in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$		
x^r ; $r\in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\sqrt{x}$		
Cos(x)		
Sin(x)		
Cos(ax+b)		
Sin(ax+b)		
$1+tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$		
$1+cotan^2x = \frac{1}{sin^2x}$		

Remarque :

L'hypothèse **I est un intervalle** (ou sur un intervalle [*a* ; *b*]) **est fondamentale**. En effet, soit les fonctions *F* et *G* définies sur *IR** par $F(x)=\frac{1}{x}$ et $\begin{cases} G(x)=\frac{1}{x}+1 \ si \ x>0 \\ G(x)=\frac{1}{x}-1 \ si \ x<0 \end{cases}$

Sur chacun des intervalles]-∞ ; 0[et]0 ; + ∞[*F* et *G* ont la même fonction dérivée :

$F'(x)=G'(x)=\frac{-1}{x^2}$ mais il n'existe pas de constante *K* telle que, pour tout *x* de *IR**, on ait *G*(*x*) = *F*(*x*) + *K*.

مجرد السعي نحو القمة يعطى المرء احتراماً لذاته وثقة
بإمكاناته و يتيح له فرصة النظر لمسافة أبعد من غيره

III. Opérations sur les primitives :

♣ f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

fonction	*Condition*	*Primitive*	*Exemples*
f ’+g’			
f ’.g + f.g’			
$\frac{f'}{f^2}$			
$\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$			
f ’.f ^{n} n∈ $\mathbb{N}^*$			
$f'.\sqrt{f}$			
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$			
(f ’○g).g’			
$f'.f^n$, n∈ $\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$			
$f'.f^r$, n∈ $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$			
$f'.\sqrt[n]{f^{1-n}}$, n∈ $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$			

1er Exercice :

Soit la fonction f définie par f(x) = $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ et soit F la primitive de *f* qui s’annule en $\sqrt{2}$

1. Montrer que F est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$
2. En déduire le signe de F(x) .
3. Soit G la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par G(x) = F($\frac{1}{sinx}$)

   a. Montrer que G est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer G’(x)

   b. En déduire que pour tout x on a G(x) = $x-\frac{\pi}{4}$

   c. Calculer F(2)

2^{eme} Exercice :

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\frac{1}{x^2-4x+5}$ Cf la courbe de f dans un repère orthonormé

1. Montrer que x = 2 est un axe de symétrie de C f
2. Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en 2 et Γ sa courbe

On pose G(x) = F(x) + F(4-x)

a. Montrer que G est dérivable sur IR et calculer G'(x)

b. En déduire que G(x) = 0 pour tout x

c. Montrer que I(2,0) est un centre de symétrie de Γ

3. Soit la fonction H définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par H(x) = F(2+tgx)

a. Montrer que H est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et calculer H'(x)

b. En déduire que H(x) = x puis calculer F(1).

3^{eme} Exercice :

Soit f(x) = $\frac{1}{x^2+1}$; x∈ [0; +∞[

1. / Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f qui s'annule en 0
2. / Soit G = F[tan(x)] ; x ∈ $[0;\frac{\pi}{2}[$

a. Montrer que G est dérivable sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ et calculer G'(x)

b. En déduire que ∀ x∈ $[0;\frac{\pi}{2}[$, on a G(x) = x

c. Calculer F($\frac{\sqrt{3}}{3}$).

3. / On pose pour tout x∈ R_+ .H(x) = F($\frac{1}{x+1}$) + F($\frac{x}{x+2}$)

a. Montrer que H est dérivable sur R_+ et déterminer H'(x).

b. En déduire que F($\frac{1}{2}$)+ F($\frac{1}{3}$) = $\frac{\pi}{4}$

4^{eme} Exercice :

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\frac{1}{x^2+1}$ et F l'unique primitive de f sur IR qui vérifie la condition F(0) = 0.

1. / Démontrer que la fonction $x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur IR. En déduire que F est impaire.
2. / Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : g(x) = F$\left(-\frac{1}{x}\right)$

a. Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif : F(x) = 2F(1) – F$\left(\frac{1}{x}\right)$ et

que la fonction F admet une limite finie L en + ∞.

3. /On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par h(x) = F(tan x).

a. Déterminer la fonction dérivée de h.

b. En déduire que, pour tout réel x, h(x) = x.

c. Calculer F(1) et en déduire la valeur de L.

5^{eme} Exercice :

Soit la fonction f : $x \mapsto 3\sin x - 2\sin^3 x$

1. / Trouver deux réels a et b tels que la fonction : $x \mapsto a\cos x + b\cos^3 x$ soit une primitive de f sur l'intervalle [0, π].
2. / En écrivant $\sin^3x = (1-\cos^2x)\sin x$ retrouver une primitive de f sur]0, π[.

6^{eme} Exercice :

Soit f la fonction définie sur IR \ {-2 ; 2} par : f(x) = $\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$

1. /Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x distinct de – 2 et de 2 : f(x) = $\frac{a}{(x-2)^3}+\frac{b}{(x+2)^3}$
2. /En déduire une primitive de f sur]-2 ; 2[.