- **YOUSSEFBOULILA**

LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE 10

I) Introduction:

1)a) Construire le graphe de la fonction ln , dans le plan muni d'un repère orthonormé

Les résultats connus: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x =$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x =$

La fonction ln est strictement de sur

Montrent que: Pour tout réel x , il existe un unique réel t ($t > 0$) tel que $x = \ln t$

b) Vocabulaire: ln est une bijection de vers

2)a) Définition: La fonction exponentielle de base e , notée (provisoirement): $x \mapsto \exp(x)$

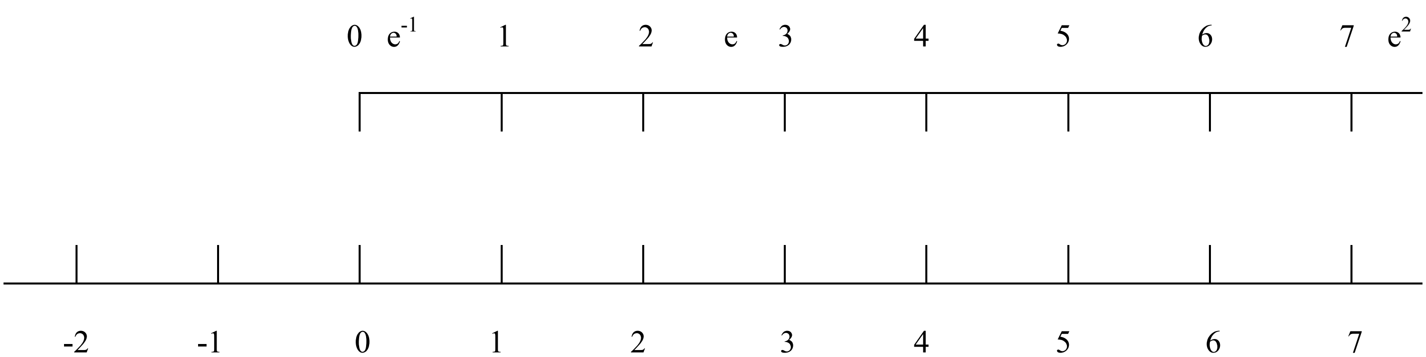
est la fonction qui a tout réel x associe l'unique réel t de

tel que : $x = \ln t$ (comme défini au **I)1)a)**)

exp: $x \mapsto \exp(x) = t$, tel que : $x = \ln t$

b) Vocabulaire: exp est la bijection réciproque de ln

c) Illustration:



d) Relation fondamentale: $\left.\begin{matrix} t \in \\ x = \ln t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \\ \exp(x) = t \end{matrix}\right.$

3) Conséquences: i) Pour tout réel x , exp(x) est un réel

ii) Pour tout réel strictement positif t , $\exp(\ln t) =$

Pour tout réel x , $\ln(\exp(x)) =$

iii) Les graphes des fonctions ln et exp , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite

Construire le graphe de la fonction exp

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) =$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) =$

v) On considère la fonction obtenue en composant la fonction ln et la fonction exp:

$x \mapsto (\ln o \exp)(x) = \ln(\exp(x)) =$ définie sur

$\forall x \in \mathbf{R}$, $(\ln o \exp)' =$ =

Conclusion: $\forall x \in \mathbf{R}$ $\exp'(x) =$

Remarque: $\forall x \in \mathbf{R}$ $\exp''(x) =$ donc exp est sur

vi) Dresser le tableau de variation de la fonction exp

II) Propriété algébrique de la fonction exponentielle:

1) Propriété algébrique fondamentale:

a) Pour tous réels a et b , $a+b = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b))$

$\Leftrightarrow \quad \ln(\exp(a+b)) = \ln(\qquad\qquad)$

$\Leftrightarrow \quad \exp(a+b) =$

b) Conséquences: Pour tous réels a et b

i) $\exp(a+(-a)) = \qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad =$

$\Leftrightarrow \qquad \exp(-a) =$

ii) $\exp(a-b) = \exp(a+(-b))$

$=$

$=$

iii) Pour tout rationnel r : $\ln((\exp(a))^r) =$

$=$

$= \ln(\exp(\qquad))$

Conclusion:

2) Notation définitive:

D'après **II)1)b)iii)** , Pour tout rationnel r , $\exp(r) = \exp(r\times 1) = (\exp 1)^r =$
On généralise cette notation et l'on pose: Pour tout réel x ; $\exp(x) = e^x$

On retiendra:

$\left.\begin{matrix} y \in \\ x = \ln y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \\ e^x = y \end{matrix}\right.$ Pour tout réel x $\qquad e^x >$

Pour tout réel y , strictement positif , $e^{\ln y} =$

Pour tout réel x $\qquad \ln(e^x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \qquad ; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$

L'application: $x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\qquad$ et $(e^x)' =$

L'application: $x \mapsto e^x$ admet des primitives sur $\qquad$ et $\text{Prim}(e^x) =$

$e^0 = \qquad ; \quad e^1 =$

Pour tous réels a et b : $e^{a+b} = \qquad ; \quad e^{-a} = \qquad ; \quad e^{a-b} =$

Pour tout rationnel r : $(e^a)^r =$

III) Exercices:

Ex 1: 1) Déterminer le domaine d'étude, puis résoudre les équations:

a) i) $\ln x = 3$ ii) $2\ln(x+1)+3 = 0$ iii) $\ln(x+1)-\ln(2x+3) = 7$ iv) $2\ln(x+1) - \ln(2x+3) = \ln 2$

b) i) $e^x = 2$ ii) $e^{\frac{x+1}{2x-3}} = 7$ iii) $e^{x^2-2x-5} = 5$ iv) $(11e^x-3)(2e^x+7) = 0$

c) i) $e^{2x}-9 = 0$ ii) $e^{2x}-7e^x+12 = 0$ iii) $e^{2x}+3e^x-10 = 0$ iv) $e^{2x}+9e^x+20 = 0$

2) Déterminer le domaine d'étude, puis résoudre les inéquations:

a) i) $2\ln x-3 > 0$ ii) $3\ln(2x-1) < -5$ iii) $\ln(2x+1) - \ln(x+3) > \ln 2$

b) i) $-e^x+1 < 5$ ii) $3e^{-x+3}-5 > 0$ iii) $e^{\frac{x-1}{x+3}} < 2$ iv) $e^{x^2+1} > 5$

c) i) $e^{2x}-7e^x+6 < 0$ ii) $e^{2x}+e^x-6 > 0$

Ex 2: 1) Déterminer le domaine de définition, puis les primitives des fonctions:

(préciser sur quel(s) intervalle(s)) i) $f(x) = x^2+x-1-e^x$ ii) $f(x) = -2e^x+x-\frac{1}{x}$

2) Déterminer le domaine de définition, puis déterminer par parties les primitives sur **R** des fonctions:

i) $f(x) = xe^x$ ii) $f(x) = (2x+1)e^x$ iii) $f(x) = x^2e^x$ iv) $f(x) = (x^2+x+1)e^x$

Ex 3: On considère la fonction: $f(x) = e^x(e^x-2)$

1) Dresser le tableau de variation de f

2)a) Donner une équation de T , la tangente au graphe de f au point d'abscisse ln2

b) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f

3) Construire T , la tangente au point d'inflexion, puis le graphe de f

4)a) Déterminer graphiquement, en fonction du réel m

le nombre de solution(s) de l'équation: $e^{2x}-2e^x-m = 0$

b) Résoudre dans **R** l'inéquation: $f(x) - 3 < 0$

IV) Autres limites à connaître:

1) Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{x}{\ln x}$

Déterminer D_g , puis étudier les limites: $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ et $\lim_{x\to+\infty} g(e^x) =$

Or $g(e^x) =$

Conclusion: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} =$

2) Soit h la fonction définie par: $h(x) = x\ln x$

Déterminer D_h , puis étudier les limites: $\lim_{x\to0^+} h(x) =$ et $\lim_{x\to-\infty} h(e^x) =$

or $h(e^x) =$

Conclusion: $\lim_{x\to-\infty} xe^x =$

3)i) La fonction e^x est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est:

Donc: $\lim_{h\to0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h} =$ Donc $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} =$

ii) Retrouver le résultat ci-dessus avec le théorème de l'Hôpital

On retiendra: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} =$; $\lim_{x\to-\infty} xe^x =$; $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} =$

4) Remarque: i) Pour tout rationnel strictement positif r

$\ln\left(\frac{e^x}{x^r}\right) =$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{x^r}\right) =$ en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r}$

« On dit que lorsque x tend vers + , l'exponentielle l'emporte sur la puissance »

ii) Pour tout rationnel strictement positif r

lorsque x tend vers - , $x^r e^x = (-|x|)^r . e^{-|x|} = (-1)^r . |x|^r . e^{-|x|} = (-1)^r \dfrac{|x|^r}{e^{|x|}}$

lorsque x tend vers: - ; $|x|$ tend vers: et $(-1)^r \dfrac{|x|^r}{e^{|x|}}$ tend vers:

Conclusion: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^r e^x =$

« On dit que lorsque x tend vers - , l'exponentielle l'emporte sur la puissance »

On retiendra: Lorsqu'il y a une forme indéterminée en ou en
« l'exponentielle l'emporte sur la puissance »

5) Exercices: Etudier les limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^2 - 2x + 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 . e^{2-x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x + e^{1-x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

V) Dérivées et primitives:

1) Dérivée des fonctions du type: $f(x) = e^{u(x)}$:

a) Si u est une fonction dérivable sur I , Alors la composée des fonctions $\exp$ et u : $\exp o u$ est dérivable sur I , et $(\exp o u)'(x) =$ $=$

On note: $\left(e^{u(x)}\right)'$

b) Exercices: 1) Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions:

i) $f(x) = e^{2x+1}$ ii) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ iii) $f(x) = (x^2-1)e^{3x-1}$ iv) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1} e^{\sqrt{x}}$ v) $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}}$

2) Etudier les limites: i) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{e^{x+1} - 1}{x+1}$ ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

2) Primitives des fonctions du type: $f(x) = u'(x).e^{u(x)}$:

Soit u une fonction dérivable sur I d'après le **V)1)a)** les primitives de $f(x) = u'(x).e^{u(x)}$ sont $F(x) =$

On retiendra: $\left(e^{u(x)}\right)' =$ en particulier: $\left(e^{ax+b}\right)' =$

$\text{Prim}(u'(x).e^{u(x)}) =$ en particulier: $\text{Prim}\left(a e^{ax+b}\right) =$

VI) Exercices:

Ex 1: 1) Déterminer le domaine de définition, puis les primitives des fonctions:

a) $f(x) = e^{2x-1}$; $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x+2}$

b) $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$; $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$

2) Résoudre dans **R** l'équation: $\int_0^x e^t(2e^t - 3)dt = 0$

3) Déterminer le domaine de définition, puis déterminer par parties les primitives des fonctions:

a) $f(x) = xe^{2x+1}$; $f(x) = (2x-1)e^{-x+2}$

b) $f(x) = x^2e^{3x-2}$; $f(x) = (x^2-2x+1)e^{-x+1}$

Ex 2: Le but de cet exercice, est de prouver que: $\exists A \in R / \forall x \in [0;+\infty[\quad \int_0^x e^{-t^2}dt \leq A$

1) Montrer que la fonction $I(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ est croissante et positive sur $[0;+\infty[$

2)a) Montrer que pour tout t de $[1;+\infty[$, on a: $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, on a: $I(x) - I(1) \leq \dfrac{1}{e} - e^{-x} \leq \dfrac{1}{e}$

3) Déterminer un réel A qui répond au problème

Ex 3: On considère les fonctions: $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1)a) Déterminer le domaine de définition de f , et le domaine de définition de g

b) Etudier la parité de f et de g

2) Montrer que pour tout réel x: a) $f^2(x) - g^2(x) = 1$

b) $g(x) < f(x)$

3)a) Etudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$

dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$

b) Donner une équation de T , la tangente au graphe de f , au point d'abscisse 0

4) a) Etudier la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$

dresser le tableau de variations de g sur $[0 ; +\infty[$

b) Donner une équation de T' , la tangente au graphe de g , au point d'abscisse 0

5)a) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x))$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Construire dans un même repère orthonormé, les tangentes T et T'

puis les graphes des fonctions f et g

6) Pour tout réel k positif, $A(k)$ est l'aire du domaine plan défini par: $0 \leq x \leq k$ et $g(x) \leq y \leq f$

a) Exprimer $A(k)$ en fonction de k

b) Etudier la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$

Ex 4: On considère la fonction: $f(x) = 2xe^{1-x}$

1) Construire le graphe de f dans un repère orthonormé (unité: 2,5 cm)

On calculera les coordonnées du point d'inflexion

2) Calculer: $\int_0^1 f(x)dx$

3)a) Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \geq 2x$

b) Calculer, en cm^2 , l'aire de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq f(x) \end{cases}$

VII) Fonction exponentielle de base 10 :

1) Définition: On appelle fonction exponentielle de base 10

la fonction notée (provisoirement): $x \mapsto \exp_{10}(x)$, qui est la bijection réciproque de la fonction logarithme de base 10

2) Relation fondamentale: $\left.\begin{matrix} y \in \\ x = \ln_{10} y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \\ \exp_{10}(x) = y \end{matrix}\right.$

3) Notation définitive: Pour tout rationnel r $\exp_{10}(r) = y \Leftrightarrow \ln_{10}(y) = r$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln y}{\ln 10} = r$$
$$\Leftrightarrow \ln y = r\ln 10$$
$$\Leftrightarrow \ln y = \ln 10^r$$
$$\Leftrightarrow y = 10^r$$

On généralise cette notation et l'on pose: Pour tout réel x , $\exp_{10}(x) = 10^x$

4) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base 10 :

a) Remarque: Pour tout réel x , $10^x = y \Leftrightarrow \ln y = x\ln 10$
$\Leftrightarrow y = e^{x\ln 10}$

b)i) $10^0 =$; $10^1 =$

ii) Pour tous réels a et b , compléter: $10^{a+b} =$
$10^{-a} =$
$10^{a-b} =$

Pour tout rationnel r : $\left(10^a\right)^r =$

5) Etude de la fonction exponentielle de base 10 :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto 10^x$

b) Construire le graphe de la fonction $x \mapsto 10^x$

DEVOIR A LA MAISON

Ex 1 : On considère les fonctions $f_p : x \mapsto \begin{cases} (x^2 + p)e^{px} & \text{si } x \geq 0 \\ p.\ln(e - x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ où p est un paramètre réel

1)a) Déterminer D , le domaine de définition de f_p

b) Etudier la continuité de f_p , sur D

c) Déterminer p pour que f_p , soit dérivable sur D

2) Pour toute la suite du problème, on fixe $p = -1$; F_{-1} est le graphe de f_{-1}

a) Déterminer le zéro et le sens de variation de f_{-1}

b) Déterminer l'asymptote et les abscisses des points d'inflexion de F_{-1}

c) Construire les demi-tangentes à F_{-1} , au point d'abscisse 0 , puis construire F_{-1}

d)i) Déterminer la valeur de a pour que la fonction $g(x) = a(x + 1)^2.e^{-x}$,

soit une primitive de la fonction f_{-1} sur $[0 ; +\infty [$

ii) Déterminer l'aire A_k , du domaine limité par F_{-1} , l'axe (Ox)

et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = k$ $(k > 1)$

iii) Déterminer la limite de A_k , lorsque k tend vers $+\infty$

.

Ex 2: On donne la fonction d'une variable réelle: $f : x \mapsto x.\ln|x| - 2x$ pour $x \neq 0$; $f(0) = 0$

F est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé

a) Démontrer que F est symétrique par rapport au point $O(0;0)$

b) i) Etudier la continuité de f en $x = 0$

ii) Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 0$

c) Etudier f : - Calculer les limites de f quand x tend vers $\pm\infty$

- Etudier la croissance et la décroissance de f

- Calculer les extremums de f

- Déterminer le les points d'intersections de F avec les axes de coordonnées

d) Dessiner F (N.B. la tangente à F en $x = 0$ est l'axe des y)

e) k étant un réel vérifiant: $0 < k < e^2$

i) Calculer l'aire géométrique $A(k)$ de la surface délimitée par F , l'axe des x
et les droites d'équation: $x = k$ et $x = e^2$

ii) Calculer la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers 0^+