NOMBRES COMPLEXES

YOUSSEFBOULILA

I) Introduction:

1) Ensembles de nombres: **N** est l'ensemble des entiers naturels

a) L'équation: $x + 3 = 0$ n'a pas de solution dans **N**, alors on décida de noter: -3, le nombre qui est solution de l'équation: $x + 3 = 0$, puis on a construit **Z** l'ensemble des entiers relatifs

b) L'équation: $7x - 4 = 0$ n'a pas de solution dans **Z**, alors on décida de noter: $\frac{4}{7}$, le nombre qui est solution de l'équation: $7x - 4 = 0$, puis on a construit **Q** l'ensemble des nombres rationnels

c) L'équation: $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans **Q**, alors on décida de noter: $\sqrt{2}$, le nombre positif qui est solution de l'équation: $x^2 - 2 = 0$, puis on a construit **R** l'ensemble des réels

d) L'équation: $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans **R**, alors on décida de noter: i, un nombre qui est solution de l'équation: $x^2 + 1 = 0$, puis on a construit **C** l'ensemble des nombres complexes

2)Remarque: On a: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ de plus les l.c.i définies dans chaque nouvel ensemble prolongent celles définies dans l'ensemble précédent .

3) Historiquement:

a) C'est en liaison avec la résolution d'équations du $3^{\text{ième}}$ degré, que sont apparus les complexes chez les mathématiciens Italiens: Scipione del Ferro (1465-1526) ; Tartaglia (1499-1557) Cardan (1501-1576) (cf **3)b)**); Bombelli (1572-1640)

b) Exercice : (Facultatif)
Résolution d'une équation du $3^{\text{ième}}$ degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, par la méthode de Cardan en 1572

i) Montrer qu'il existe toujours un réel α tel que: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ X^3 + pX + q = 0 \end{cases}$

ii) Montrer qu'il est toujours possible de choisir le produit u.v tel que: $X^3 + pY + q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = u + v \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

iii) Ecrire l'équation du second degré en Y dont les racines sont: u^3 et v^3

iv) Appliquer la méthode de CARDAN à l'équation: $x^3-2x+4 = 0$

On montrera par calcul que: $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{10+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ et $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{10-6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$

v) Appliquer la méthode de CARDAN à l'équation: $x^3-2x+4 = 0$
CARDAN eut donc l'idée d'introduire un nombre i tel que: $i^2 = -1$ ce qui lui permit

(en posant: $-\frac{100}{27}=\left(\frac{10}{3\sqrt{3}}i\right)^2$) de trouver des solutions (exprimées en fonction de i) à l'équation:

$Y^2+6Y+\frac{343}{27}=0$

On montrera par calcul que: $\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}i\right)^3=-3+\frac{10}{3\sqrt{3}}i$ et $\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}i\right)^3=-3-\frac{10}{3\sqrt{3}}i$, ce qui permet de trouver une solution de l'équation: $x^3-2x+4=0$

c) L'ensemble des réels est identifié à « l'axe des réels ».

En 1811 avec Gauss et avec Argand (1768-1822) que l'on identifie l'ensemble des nombres complexes avec « le plan complexe » (ou plan d'Argand-Cauchy).

II) Corps des nombres complexes:

1) Le nombre i : i est donc un nombre complexe, qui est solution de l'équation: $x^2+1=0$

Donc $i^2=$

2) C l'ensemble des nombres complexes:

a)i) D'après le **I)2)** tous les nombres z de la forme: $z=a+ib$ (avec a et b réel) doivent être dans **C**

ii) Définition: $\mathbf{C}=\{a+ib;(a;b)\in\mathbf{R}^2\}$

iii) Exercices: i) $z=a+ib$, démontrer que: $z=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=0$

ii) $z=a+ib$; $z'=a'+ib'$, démontrer que: $z=z' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$

b) Vocabulaire: On considère un nombre complexe $z=a+ib$ (avec a et b réel)

i) L'écriture $z=a+ib$ (avec a et b réel) d'un complexe, s'appelle la forme cartésienne de z

ii) $z=a+ib$ est un réel $\Leftrightarrow$

iii) $z=a+ib$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$

iv) a est la partie réelle du nombre complexe $z=a+ib$; on note: $R(z)=a$

v) b est la partie imaginaire du nombre complexe $z=a+ib$; on note: $I(z)=b$ (remarque: $I(z)\in$)

vi) On appelle conjugué de z , le complexe noté $\bar{z}$ défini par: $\bar{z}=a-ib$

vii) On appelle plan complexe (ou plan d'Argand-Cauchy), un plan muni d'un repère orthonormé (O,I;J)

A tout nombre complexe $z=a+ib$

on fait correspondre le point M(a;b) , noté: M(z) , appelé: point image de z .

et le vecteur $\vec{OM}(a;b)$, appelé vecteur image de z .

A tout point M(a;b) on fait correspondre le nombre complexe $z=a+ib$, appelé l'affixe de z .

viii) $z\in\mathbf{R} \Leftrightarrow M(z)\in$; z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow M(z)\in$

L'axe (Ox) est appelé ; L'axe (Oy) est appelé

3) (C, + , .) le corps des nombres complexes:

a) Addition et multiplication dans C : $\forall\ (z,z')\in\mathbf{C}^2$ z = ; z' =

i) z+z' =

ii) z.z' =

b) Exercices: Calculer: $3-\frac{2}{3}i-i(2-\frac{1}{3}i)$; $(2-3i)(\frac{2}{7}+5i)$; $(2-3i)^2$; $(\frac{2}{3}i+5)^2$

$(5-3i)(5+3i)$; $\frac{1}{5^2+3^2}(5-3i)(5+3i)$; $z.\bar{z}$; $(a^2+b^2\neq 0)$ $\frac{1}{a^2+b^2}z.\bar{z}$

c) Interprétation géométrique:

i) De l'addition: z_0 est un nombre complexe fixé

ii) De la multiplication d'un complexe par un réel: k est un réel fixé

d) Propriétés: Dans (**C**, + ; .)

i) + et . sont associatives et commutatives; . est distributive par rapport à +

ii) 0 est l'élément neutre de + ; 1 est l'élément neutre de .

iii) Tout complexe $z = a + ib$ admet un opposé: $-z =$

iv) Tout complexe non nul $z = a + ib$ admet un inverse: $\frac{1}{z} =$

v) Conclusion:

e) Remarque: On ne peut pas prolonger à **C** , les relations ($\leq$ ou $\geq$) d'ordre définies dans **R**

En effet, on aurait: $i \leq 0$ ou $i \geq 0$ et dans les deux cas, on devrait avoir: $i^2 \geq 0$

f) Exercices: i) Résoudre dans **C** les équations(d'inconnue z):

$$iz+\frac{3i-5}{2i} = -20+22i \quad ; \quad (4-i)z-\frac{3+i}{2-3i} = 1+i \quad ; \quad (2-3i)z+\frac{5-i}{3+i} = 2i$$

ii) Résoudre dans $\mathbf{C}^2$ les systèmes d'équations:

$$\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1+4i \end{cases} \; ; \; \begin{cases} (1+i)z - iz' = 2 \\ (2-i)z + (1+2i)z' = i \end{cases} \; ; \; \begin{cases} (1+2i)z + (1+i)z' = 1 \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1+4i \end{cases}$$

iii) Déterminer tous les complexes z tels que: z^2+2z-3 soit un réel .

Représenter graphiquement l'ensemble solution.

4) Nombres complexes conjugués: $z = a + ib$; $\bar{z} =$; $\bar{\bar{z}} =$; $z.\bar{z} =$; $(z\neq 0)$ $\frac{1}{z} =$

a) Interprétation graphique:

b) Propriétés: Démontrer que:

i) $z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 0$

ii) $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$; z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$

iii) $z + \bar{z} =$; $z - \bar{z} =$; $R(z) =$; $I(z) =$

iv) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$; $(n \in \mathbf{N})$ $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$; $(z\neq 0)$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

c) Exercices: Déterminer tous les complexes z tels que: $\frac{2z-4}{z-i}$ soit un réel .

Représenter graphiquement l'ensemble solution.

5) Module d'un nombre complexe:

a) Définition: Pour tout complexe $z = a + ib$; $z.\bar{z} =$

Le réel (positif ou nul) $\sqrt{z.\bar{z}} =$ s'appelle le module de z

b) Remarques: 1) Si z est un réel, Alors: $z = a+0i = a$

Alors: $|z| =$ $=$ (valeur absolue de)

La notion de module d'un nombre complexe est le prolongement à **C** de la notion de valeur absolue d'un nombre réel, donc la notation est la même

2) On note: $z = a+ib$, $|z| = |a + ib| =$

c) Exercices: Déterminer le module des complexes:

-7 ; $3-\sqrt{10}$; $5i$; $3+4i$; $3-4i$; $-2-3i$; $-2+3i$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $(2-i)(1-3i)$; $\frac{1}{1+i}$

c) Interprétation géométrique:

i) $|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = d(O,M)$; Remarques: $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

ii) $|z'-z| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = d(M,M')$

iii) L'ensemble **U** des complexes de module 1 est représenté graphiquement par:

Pour tout complexe z , de module 1 , il existe un unique réel θ de $[0;2\Pi[$ tel que:

d) Exercices: i) Démontrer que: $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

ii) Représenter graphiquement l'ensemble des solution de l'équation: $|z-i| = 2$

e) Propriétés: Démontrer que:

i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $|z.z'| = |z|.|z'|$; $(n \in \mathbf{N})$ $|z^n| = |z|^n$; $(z \neq 0)$ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

f) Exercices: i) Démontrer que: $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$ $|z| \geq |R(z)|$; $|z| \geq |I(z)|$;

ii) Démontrer que: $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$ $|z+z'| \leq |z| + |z'|$, en complétant:

$|z+z'| \leq |z| + |z'| \Leftrightarrow |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}' + \bar{z}z' \leq 2|z|.|\bar{z}'|$ car:

$\Leftrightarrow 2R(\quad) \leq 2|\quad|$

iii) Interpréter graphiquement les relations ci-dessus.

6) Racines carrées d'un nombre complexe Z = a + ib :

a) Définition: On apelle racine carrée de Z , toute solution z de l'équation:

Remarque:

b) i) Si $Z \in \mathbf{R}^+$ Alors $S =$

ii) Si $Z \in \mathbf{R}^-$ Alors $S =$

iii) Si $Z \in \mathbf{C}\text{-}\mathbf{R}$ Alors $Z =$; on pose $z = x+iy$ donc $z^2 = (x+iy)^2 =$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \\ x^2 + y^2 = \\ 2xy = \end{cases}$$; on résoud ce système, pour déterminer x et y

c) Exercice: Déterminer les racines carrées des complexes: -1 ; -5 ; i ; $1+i$; $3+4i$; $-5+2i$.

7) Résolution dans C des équations du second degré à coefficients complexes:

a) Forme canonique de: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^2$:

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=\alpha\left[\left(z+\frac{}{}\right)^2-\left(\frac{}{}\right)^2+\frac{}{}\right]=\alpha\left[\left(z+\frac{}{}\right)^2-\frac{}{}\right]$$

b) Résolution dans C de $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ $(\alpha;\beta;\gamma)\in C^*\times C^2$:

On pose: $\Delta=$; Soit δ une racine carrée de Δ

$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{}{} \\ \text{ou} \\ z=\frac{}{} \end{cases}$ Conclusion: S =

c) Exercices: 1) Résoudre dans **C** , les équations: $z^2+z+1=0$; $z^2+2i=0$; $z^2+(3\text{-}i)z-3i=0$

2) Résoudre dans **C** , les équations: $z^2-2z-4i-2=0$; $-z^2-iz+\frac{1}{\sqrt{2}}i=0$

d) Remarque: Dans le cas où $(\alpha;\beta;\gamma)\in \mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^2$

z_1 est solution de: $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0 \Leftrightarrow \overline{}$

$\Leftrightarrow \alpha z_1{}^2+\beta z_1+\gamma=\bar{0}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{z_1}$ est solution de:

Conclusion: Les solutions dans **C** , d'une équation du second degré à coefficients **réels**, sont

8) Autres équations: P(z) est un polynôme à coefficients complexes.

a) Théorème: z_o est une racine de P $\Leftrightarrow$ « On peut mettre $(z\text{-}z_0)$ en facteur dans P(z) »

b) Exercices: Aprés avoir trouvé une racine évidente,déterminer toutes les racines des polynômes:

$P(z)=z^3+4z^2+7z+4$; $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+6i)z+3\text{-}4i$

c) Remarque: Si z_0 est une racine dans **C** , d'un polynôme à coefficients **réels**, alors:

III) Forme trigonométrique d'un nombre complexe:

1) Module et argument d'un nombre complexe non nul:

a) Introduction: $\forall$ $z\in \mathbf{C}^*$ $z=|z|.\frac{z}{|z|}$ or: $\frac{z}{|z|}$ est un complexe

donc: Il existe un θ de $[0;2\Pi[$

tel que: $\frac{z}{|z|}=$ et donc: z =

b) Définitions: **i)** L'unique réel θ défini ci-dessus, s'appelle l'argument principal de z

ii) Si $Z\in\mathbf{R}^-$ Alors S =

iii) Si $Z\in \mathbf{C}\text{-}\mathbf{R}$ Alors Z = ; on pose $z=x+iy$ donc $z^2=(x+iy)^2=$

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} \left|z^2\right| = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \\ x^2 + y^2 = \\ 2xy = \end{cases}$$; on résoud ce système, pour détrerminer x et y

c) Exercice: Déterminer les racines carrées des complexes: -1 ; -5 ; i ; 1+i ; 3+4i ; -5+2i .

7) Résolution dans C des équations du second degré à coefficients complexes:

a) Forme canonique de: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = \alpha\left[\left(z + \frac{\quad}{\quad}\right)^2 - \left(-\right)^2 + -\right] = \alpha\left[\left(z + \frac{\quad}{\quad}\right)^2 - \frac{\qquad}{\qquad}\right]$$

b) Résolution dans C de $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$:

On pose: $\Delta =$; Soit δ une racine carrée de Δ

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \iff$

$\iff$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{\qquad}{\qquad} \\ \text{ou} \\ z = \frac{\qquad}{\qquad} \end{cases}$$

Conclusion: S =

c) Exercices: 1) Résoudre dans **C** , les équations: $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 + 2i = 0$; $z^2 + (3-i)z - 3i = 0$

2) Résoudre dans **C** , les équations: $z^2 - 2z - 4i - 2 = 0$; $-z^2 - iz + \frac{1}{\sqrt{2}}i = 0$

d) Remarque: Dans le cas où $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

z_1 est solution de: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \iff$ ________

$\iff \overline{\alpha z_1{}^2 + \beta z_1 + \gamma} = \bar{0}$

$\iff$

$\iff$

$\iff \overline{z_1}$ est solution de:

Conclusion: Les solutions dans **C** , d'une équation du second degré à coefficients **réels**, sont

8) Autres équations: P(z) est un polynôme à coefficients complexes.

a) Théorème: z_o est une racine de P $\iff$ « On peut mettre $(z-z_0)$ en facteur dans P(z) »

b) Exercices: Aprés avoir trouvé une racine évidente,déterminer toutes les racines des polynômes:

$P(z) = z^3 + 4z^2 + 7z + 4$; $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+6i)z + 3-4i$

c) Remarque: Si z_0 est une racine dans **C** , d'un polynôme à coefficients **réels**, alors:

III) Forme trigonométrique d'un nombre complexe:

1) Module et argument d'un nombre complexe non nul:

a) Introduction: $\forall$ z $\in$ **C*** $z = |z|.\frac{z}{|z|}$ or: $\frac{z}{|z|}$ est un complexe donc: Il existe un θ de $[0;2\Pi[$

tel que: $\frac{z}{|z|} =$ et donc: $z =$

<u>b) Définitions:</u> i) L'unique réel θ défini ci-dessus, s'appelle l'argument principal de z

On note: $\arg z = \theta$

ii) $\forall\ k \in \mathbf{Z^*}$ $\cos(\theta+2k\Pi) + i\sin(\theta+2k\Pi) =$

$(\theta+2k\Pi)$ est aussi un argument de z, mais ce n'est pas l'argument principal de z

iii) La forme trigonométrique de z est: $z =$

<u>c) Remarque:</u> $\cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta' + i\sin\theta' \Leftrightarrow$

<u>d) Interprétation graphique des définitions ci-dessus:</u>

<u>e) Détermination de θ l'argument de $z = a + ib$:</u>

$$z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Conclusion: $\cos\theta =$ et $\sin\theta =$

Remarque: $R(z) =$ et $I(z) =$

<u>f) Exercices:</u> i) Déterminer le module et l'argument, puis la forme trigonométrique des complexes:

3 ; -3 ; i ; $-i$; $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$; $\sqrt{3}-i$; $-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i$; $4+3i$; $-2+5i$

ii) Interpréter graphiquement les résultats du **i)**

<u>g) Remarques:</u> i) $z \in \mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $z = 0$ ou $\arg z =$

ii) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\arg z =$

iii) $\forall\ z \in \mathbf{C^*}$ $\arg(-z) =$; $\arg \bar{z} =$

<u>2) Module et argument du produit de deux complexes donnés sous forme trigonométrique:</u>

<u>a)</u> $\forall\ (z, z') \in \mathbf{C^*}\times\mathbf{C^*}$ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$; $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z.z' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\,.\,|z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') = |z|.|z'|.(\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta' + i\sin\theta')$

On rappelle que: $\cos(\theta+\theta') =$

$\sin(\theta+\theta') =$

Conclusions: i) $z.z' = |z|.|z'|\ (\cos(\quad) + i\sin(\quad))$

ii) $\arg(z.z') =$

<u>b) Notation exponentielle $|z|\,e^{i\theta}$ correspondante à la forme trigonométrique $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$</u>

i) Le résultat du **2)a)** se retient facilement si:

$\forall\ (z, z') \in \mathbf{C^*}\times\mathbf{C^*}$ on note: $z = |z|(\cos\theta + i\sin) = |z|\,e^{i\theta}$; $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') = |z'|\,e^{i\theta'}$

En effet: $z.z' = |z|\,e^{i\theta}.|z'|\,e^{i\theta'} = |z|.|z'|.e^{i\theta}.e^{i\theta'} = |z|.|z'|.e^{i\theta+i\theta'} = |z|.|z'|.e^{i(\theta+\theta')}$

$= |z|.|z'|.(\cos(\quad) + i\sin(\quad))$

ii) Remarque: $|z|\,e^{i\theta} = |z'|\,e^{i\theta'} \Leftrightarrow$

iii) Notation exponentielle de l'inverse d'un complexe non nul: $\forall\ z \in \mathbf{C^*}$ $z = |z|\,e^{i\theta}$ (avec:)

$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$ (ce complexe est bien l'inverse de z car: $|z| e^{i\theta} . \frac{1}{|z|} e^{-i\theta} =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$)

iv) Notation exponentielle du quotient de deux nombres complexes non nuls:

$\forall\ (z,z') \in \mathbf{C^*} \times \mathbf{C^*}\quad z = |z|\, e^{i\theta}$ et $z' = |z'|\, e^{i\theta'}$ $\qquad \frac{z}{z'} =$

v) Exemples: 1) Déterminer la notation exponentielle des complexes:

$$1\ ;\ -1\ ;\ i\ ;\ \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{1}{1-i}\ ;\ \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{1-i}\ ;\ \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

2) Déduire du 1) $\cos\frac{25\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{25\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

3) Formule de Moivre:

Démontrer par récurrence: $\forall\ \theta \in \mathbf{R}\ ;\ \forall\ n \in \mathbf{N}\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

On note: $\forall\ \theta \in \mathbf{R}\ ;\ \forall\ n \in \mathbf{N}\quad (e^{i\theta})^n =$

4) Exercices: i) Calculer: $(1+i)^7\ ;\ \frac{(1-i)^{13}}{(1+i\sqrt{3})^5}$

ii) $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $\forall\ x \in \mathbf{R}\text{-}\{2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$, on pose:

$$C_n = \cos(0.x) + \cos(1.x) + \cos(2.x) + \dots\dots\dots\dots + \cos(n.x) = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k.x)$$

$$S_n = \sin(0.x) + \sin(1.x) + \sin(2.x) + \dots\dots\dots\dots + \sin(n.x) = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k.x)$$

1) Montrer que: $C_n + i\,S_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$

2) Compléter: $e^{ix}\text{-}1 = e^{i\frac{x}{2}}(\qquad - \qquad)$; $e^{i(n+1)x}\text{-}1 = e^{i(n+1)\frac{x}{2}}(\qquad - \qquad)$

3) Déterminer la forme cartésienne de: $e^{i\frac{x}{2}}\text{-}e^{-i\frac{x}{2}}$ et de $e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\text{-}e^{-i(n+1)\frac{x}{2}}$

4) Déduire de ce qui précède, l'expression de C_n ; et de S_n en fonction de n.

IV) Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe Z non nul :

1) Définition: $n \in \mathbf{N^*}$ On appelle racine $n^{ième}$ de Z , toute solution z , de l'équation:

2) Détermination des racines $n^{ième}$ du nombre complexe Z :

i) $Z = |Z| e^{i\varphi}$; $z = |z|\, e^{i\theta}$; $z^n = Z \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \right. \qquad \Leftrightarrow \left\{ \right.$

Conclusion: Il y a $\quad$ racines $n^{ième}$ du nombre complexe Z
qui sont:

ii) Exercices: 1)a) Déterminer l'écriture exponentielle, puis cartésienne des 3 racines troisième de 1

b) Représenter graphiquement les 3 racines troisième de 1

c) Calculer la somme des 3 racines troisième de 1

2)a) Déterminer l'écriture exponentielle des 4 racines quatrième de 1+i

b) Représenter graphiquement les 4 racines quatrième de 1+i

3)a) Déterminer l'écriture exponentielle des n racines $n^{\text{ième}}$ de 1(racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité)

b) Quelle figure obtient-on, si l'on représente graphiquement les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité ?

c) Démontrer que la somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle.

4) Déterminer l'écriture exponentielle, puis cartésienne des 2 racines carrées de 1+i

5) Déterminer l'écriture exponentielle des 3 racines troisième de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

<u>3) Résolution dans C de l'équation: $az^n+b=0$ (avec a non nul):</u>

i) $az^n+b=0 \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$

ii) Exercices: Résoudre: $(3+3i)z^4=1$; $(1-i\sqrt{3})z^5=-i$; $(\sqrt{3}+i)z^3=-2+2i$

<u>4) Problème:</u> Le but de ce problème est d'établir la méthode construction à la règle et au compas des décagones réguliers, des pentagones réguliers et des étoiles à 5 branches

A) On pose $x=\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $y=\sin\dfrac{\pi}{5}$

1) Démontrer que: $\begin{cases} x^5-10x^3y^2+5xy^4=-1 \\ 5x^4y-10x^2y^3+y^5=0 \end{cases}$

2)a) Démontrer que: $16y^4-20y^2+5=0$

b)i) Résoudre l'équation ci-dessus

ii) En déduire que: $\sin\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$

iii) On rappelle, que $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, en déduire que: $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$

En déduire que: $\sin^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)$, et montrer que: $\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

iv) En déduire que: $\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

B) Une unité est fixée dans le plan (5cm par exemple)

1) Construire un cercle C de centre O et de rayon 1 , puis un cercle C ' de centre O' et de rayon 0,5 tangent intérieurement à C

2)a) La tangente à C ' passant par O coupe C en A (et en A') . Le segment $[O'A]$ coupe C ' en B

Montrer que $AB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) C est l'un des points de C tels que: AC = AB ; I est le milieu de $[AC]$

i) Démontrer que $A\hat{O}I=\dfrac{\pi}{10}$

ii) En déduire la construction du décagone régulier, du pentagone régulier et de l'étoile à 5 branches inscrits dans C