CONIQUES

I) Introduction:

1) Origine du mot « conique »:

2) Etude d'une parabole:

a) Construire la parabole d'équation: $y = x^2$, dans un R.O.N.$(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) M est le point de la parabole, d'abscisse a . Déterminer une équation de la tangente à la parabole en M

c) T est le point d'intersection de la tangente en M , à la parabole et de l'axe (Ox)
m est le projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox) . Montrer que T est le milieu de $[Om]$

d) La perpendiculaire, à la tangente, passant par T , coupe l'axe (Oy) en F ,
et coupe la parallèle à (Oy) passant par M en P

i) Montrer que les points P et F sont symétriques par rapport à la droite (MT)

ii) Vérifier que les coordonnées de F sont indépendantes de a

iii) Vérifier que l'ordonnée de P est indépendante de a

iv) En déduire que tout point M de la parabole est à égale distance de F et d'une droite à préciser

II) Généralités:

1) Définition: **F** est un point ; **d** est une droite qui ne passe pas par **F** ; **e** est un réel strictement positif
L'ensemble Γ , des point M tels que: $d(M,\mathbf{F}) = \mathbf{e}.d(M,\mathbf{d})$
est la conique de foyer **F** , de directrice **d** et d'excentricité **e**

2) Exemples: a) Au **I)2)** on a vu que la parabole: $y = x^2$, est la conique de foyer F(;)
de directrice d:
d'excentricité e =

b) F est un point situé à 3cm. d'une droite d

i) Construire « points par points », la conique de foyer F , de directrice d et d'excentricité 2

ii) idem avec une excentricité de $\frac{1}{2}$

3) Axe focal et sommet(s) d'une conique:

a) Définition: La perpendiculaire à d passant par F , est appelé l'axe focal de la conique Γ ,
c'est un axe de symétrie de la conique Γ

b) On appelle K , le projeté orthogonal de F sur d
Etudier suivant les valeurs de e , le nombre de point(s) d'intersection de la conique Γ , et de l'axe focal

c) Définition: Les points obtenus au **3)b)** sont appelés le(s) sommet(s) de la conique Γ

On retiendra: Si $e = 1$, la conique Γ , s'appelle une
Si $e < 1$, la conique Γ , s'appelle une

Si $e > 1$, la conique Γ , s'appelle une

5) Exercice: G est le graphe dans un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$, de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Démontrer que G est l'hyperbole de foyer $F(\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$

de directrice $d : x + y - \sqrt{2} = 0$

d'excentricité $e = \sqrt{2}$

III) Equation cartésienne des coniques :

1) Cas général: On considère un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère le point $F(\alpha\,;\beta)$ et la droite $d: ux + vy + w = 0$ (avec $u\alpha + v\beta + w \neq 0$)

Compléter: $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow$

En déduire que Γ admet une équation cartésienne du type: $ax^2 + cxy + by^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

2) Parabole, équation réduite:

a) Préliminaires: π est la parabole de foyer F et de directrice d et d'exentricité $e =$

K est le projeté orthogonal de F sur d

On note p la longueur FK ; $FK = p$ $(p \neq 0)$

Soit S le sommet (milieu de $[KF]$) de la parabole π

On considère le R.O.N. $(S,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{j}$ colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{SF}$

b) Compléter: F(;) ; d:

$M(x;y) \in \pi \Leftrightarrow$

c) Réciproque: On considère un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$, et p un réel non nul

Montrer que l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2 = 2py$ est une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice

d) Remarque:

Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$	Dans le R.O.N. $(O,\vec{j},\vec{i})$
M(x ; y)	M(;) Posons $x' = y$ et $y' = x$
$\pi : x^2 = 2py$ est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :	
$\pi : y^2 = 2px$ est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :	$\pi : x'^2 = 2py'$ est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :

On retiendra: p est un réel non nul. Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$

π : $x^2 = 2py$ est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :
π : $y^2 = 2px$ est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :

Vocabulaire: Les équation ci-dessus sont des équations réduites de la parabole
$KF = |p|$ est le paramètre de la parabole

3) Ellipse, Hyperbole, équation réduite:

a) Préliminaires: Γ est la conique de foyer F de directrice d et d'excentricité $e \neq 1$
K est le projeté orthogonal de F sur d
D'après **II)3)b)c)** Γ a deux sommets S_1 et S_2 , qui vérifient:
$\overrightarrow{S_1F} = -e.\overrightarrow{S_1K}$ et $\overrightarrow{S_2F} = e.\overrightarrow{S_2K}$

Remarque: $e > 0$ donc $S_1 \in [FK]$
Soit O le milieu de $[S_1S_2]$; On pose: $OS_1 = a$ ($a \neq 0$) et $OF = c$

On considère le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ soit colinéaire et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{OF}$

Remarque: $\overrightarrow{OF} = c.\vec{i}$

i) Montrer que: $(1+e).\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} + e.\overrightarrow{OK}$ et que: $(1-e).\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OF} - e.\overrightarrow{OK}$

ii) En déduire que: $\overrightarrow{OF} = e.\overrightarrow{OS_1}$ et $\overrightarrow{OS_1} = e.\overrightarrow{OK}$

Remarques: $e > 0$; $\overrightarrow{OS_1}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{OF}$
donc $\overrightarrow{OS_1}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{i}$
donc $\overrightarrow{OS_1} = a.\vec{i}$

iii) En déduire que: $e = \dfrac{c}{a}$ et $\overrightarrow{OK} = \dfrac{a^2}{c}.\vec{i}$

Remarque: F(;) ; d:

b) Compléter: $M(x ; y) \in \Gamma \Leftrightarrow$

On retiendra: Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la conique Γ , de foyer $F(c ; 0)$
de directrice $d: x = \dfrac{a^2}{c}$
d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$
a pour équation cartésienne: $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

c) Remarques: i) $M(x ; y) \in \Gamma \Leftrightarrow M'(x ; -y) \in \Gamma \Leftrightarrow M''(-x ; y) \in \Gamma$
(Ox) (axe focal) et (Oy) (axe non focal) sont des axes de symétrie de Γ
O est centre de symétrie de Γ
ii) On peut alors définir par symétrie par rapport à (Oy),
un autre foyer F' et une autre directrice d'

Γ est aussi la conique de foyer F', de directrice d' et d'excentricité e

d) Equation réduite de l'ellipse: 0 e 1 , donc c a , donc $F \in [S_1S_2]$

On pose: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

l'équation réduite de l'ellipse est: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vocabulaire: Les points $B_1(0;b)$ et $B_2(0;-b)$ sont des points de l'ellipse,
ils sont sur la médiatrice de $[S_1S_2]$; et b a donc B_1B_2 S_1S_2
(S_1S_2) est le grand axe de l'ellipse et (B_1B_2) est le petit axe de l'ellipse

e) Equation réduite de l'hyperbole: e 1 , donc c a , donc $F \notin [S_1S_2]$

On pose: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

l'équation réduite de l'hyperbole est: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

f) Exercice: On considère un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que l'hyperbole: H : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) N'a aucun point sur la médiatrice de $[S_1S_2]$, avec $S_1(a ; 0)$ et $S_2(-a : 0)$
2) $-a < \alpha < a$. N'a aucun point d'intersection avec les droites: $d_\alpha : x = \alpha$

g) Réciproque: On considère un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

i) (on suppose: $a > b > 0$) Démontrer que Γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse dont on donnera les éléments caractéristiques

ii) Démontrer que Γ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole dont on donnera les éléments caractéristiques

h) Remarque:

Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$	Dans le R.O.N. $(O, \vec{j}, \vec{i})$
M(x ; y)	M(;) Posons x' = y et y' = x
Γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ c = e = est l' de foyer **F**(;) de directrice: **d** :	
Γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < a < b)$ c = e = est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :	Γ: $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ $(b > a > 0)$ c = e = est la de foyer **F**(;) de directrice: **d** :
Γ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ c = e = est l' de foyer **F**(;)	

de directrice: **d** :	
Γ: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ c = e = est l' de foyer **F**(;) de directrice: **d** :	Γ: $\frac{x'^2}{b^2}-\frac{y'^2}{a^2}=1$ c = e = est l' de foyer **F**(;) de directrice: **d** :

On retiendra:	**ELLIPSE :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$			
	c	**Excentricité e**	**Foyer F**	**Directrice associée**
$0 < b < a$	$\sqrt{a^2-b^2}$	$\frac{c}{a}$	F(c ; 0)	$x=\frac{a^2}{c}$
$0 < a < b$	$\sqrt{b^2-a^2}$	$\frac{c}{b}$	F(0 ; c)	$y=\frac{b^2}{c}$

On retiendra: **$a > 0$; $b > 0$**	**HYPERBOLE :** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$			
	c	**Excentricité e**	**Foyer F**	**Directrice associée**
	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{c}{a}$	F(c ; 0)	$x=\frac{a^2}{c}$
	HYPERBOLE : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$			
	c	**Excentricité e**	**Foyer F**	**Directrice associée**
	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{c}{b}$	F(0 ; c)	$y=\frac{b^2}{c}$

Remarque: Si $a = b$ Alors $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ est

IV) Construction d'ellipses et d'hyperboles à partir de leurs équations réduites:

1) Ellipse: On considère un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère l'ellipse d'équation: $E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ supposons $a > b$

Pour des raisons de symétrie il suffit de construire la portion d'ellipse contenue dans le premier quadrant ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) puis de compléter par symétrie par rapport à

a) Montrer que dans le premier quadrant $M(x;y) \in E \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

b)i) Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ii) Etudier les tangentes à E aux points d'abscisses: 0 et a

iii) Construire E , lorsque $a = 3$ et $b= 1$

iv) Placer sur le graphique les foyers et les directrices et déterminer e

2) Hyperbole: On considère un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère l'hyperbole d'équation: $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Montrer que dans le premier quadrant $M(x;y) \in H \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

b)i) Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

ii) Etudier la tangente à H au point d'abscisse: a

iii) Etudier les asymptotes au graphe de f

iv) Construire H , lorsque $a = 3$ et $b = 1$

v) Placer sur le graphique les foyers et les directrices et déterminer e

c) Remarques: i)

Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$	Dans le R.O.N. $(O,\vec{j},\vec{i})$
M(;)	M(;) Posons x' = y et y' = x
$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l' d'asymptotes: y = et y =	
$\Gamma: -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l' d'asymptotes: y = et y =	$\Gamma: \frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1$ est l' d'asymptotes: y = et y =

ii) Lorsque a = b les asymptotes sont les droites: , elles sont
on dit que l'hyperbole est équilatère

On retiendra:

Dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l' d'asymptotes: y = et y =

$\Gamma: -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l' d'asymptotes: y = et y =

3) Courbes d'équations: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$ (p et q sont des réels non nuls) , dans un R.O.N.:

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques et construire les coniques

$\Gamma_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\Gamma_2 : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$; $\Gamma_3 : 2x^2 - 2y^2 = 1$; $\Gamma_4 : 2y^2 - x^2 = 2$

On retiendra:

$\Gamma: \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$

Si p et q sont négatifs Alors Γ est

Si p et q sont distincts et positifs Alors Γ est

Si p et q sont égaux et positifs Alors Γ est
Si p et q sont de signes contraires, Alors Γ est

V) Courbes d'équations: $\Gamma : ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + f = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$:

1) 1^er cas: a et b sont deux réels non nuls

Compléter: $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x+ \quad)^2 + b(y+ \quad)^2 + f - \qquad = 0$

1^er sous-cas: Si $\qquad = 0$

1^er sous-sous-cas Alors Γ

2^ième sous-sous-cas Alors Γ

Vocabulaire: Dans les deux cas ci-dessus, on dit que Γ est une conique

2^ième sous-cas: Si $\qquad \neq 0$

Alors: $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{(x+ \quad)^2}{u} + \frac{(y+ \quad)^2}{v} = 1$

avec u = et v =

Donc le point M'(;) image du point M(x;y) par la translation de vecteur $\vec{u}$(;)
est un point de la courbe d'équation: , or M est l'image de M' par
Donc Γ est l'image de la courbe Γ' d'équation : par la translation de vecteur

On retiendra: Pour construire Γ: $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + f = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$ (avec $a.b\neq 0$)
on construit la courbe d'équation : $\frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v} = 1$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ avec: Ω(;
)

2) 2^ième cas: L'un des réels a et b est nul (supposons a = 0) (si c'est b = 0 , on échange le rôle de x et y)

Compléter: $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow b(y+ \quad)^2 + \qquad = 0$

$\Leftrightarrow (y+ \quad)^2 = 2p(x+ \quad)$

Donc le point M'(;) image du point M(x;y) par la translation de vecteur $\vec{u}$(;)
est un point de la courbe Γ' d'équation: , or M est l'image de M' par

Donc Γ est l'image de la courbe Γ' d'équation : par la translation de vecteur

On retiendra: Pour construire Γ: $by^2 + 2cx + 2dy + f = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$
on construit la parabole d'équation : $y^2 = 2px$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ avec: Ω(;)

Remarque: Si c = 0 Alors Γ est soit vide, soit une droite, asoit deux droites

3) Exercices: Dans le plan, muni d'un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Construire et donner les éléments caractéristiques des courbes d'équation:

$\Gamma_1 : 16x^2 + 25y^2 - 160x + 200y + 400 = 0$ $\qquad \Gamma_2 : 9x^2 - 4y^2 - 18x - 27 = 0$

; $\Gamma_3 : 25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 1356 = 0$ $\qquad \Gamma_4 : 9x^2 - 54x - 4y^2 - 16y + 101 = 0$

$\Gamma_5 : y^2 - 8x + 4y - 36 = 0$ $\Gamma_6 : x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

$\Gamma_7 : y^2 + 2x + y - \frac{11}{4} = 0$

;

VI) Courbes d'équations: $\Gamma : ax^2 + bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$:

1) Méthode: On déterminer un réel α tel que le point $M'(x';y')$, image du point $M(x;y)$ par la rotation de centre O et d'angle α rad. , soit un point d'une courbe d'équation:

$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + F = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$

$M' = r_{O,\alpha}(M) \Leftrightarrow M = \quad (M')$

a)i) Compléter: $M' = r_{O,\alpha}(M) \Leftrightarrow M = \quad (M')$

ii) Etablir géométriquement que:

$M'(x';y')$ est l'image du point $M(x;y)$ par la rotation de centre O et d'angle α rad.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x'.\cos\alpha + y.\sin\alpha \\ y = -x'.\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

b) Compléter: $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow$

c) En déduire que la condition sur α pour que M' , image du point $M(x;y)$ par la rotation de centre O et d'angle α rad. soit un point de la courbe Γ' d'équation: $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + F = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$; est: $(a - c)\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 0$

d) Résoudre: (en discutant suivant les valeurs de a ; b et c) $(b\neq 0)$

l'équation trigonométrique: $(a - c)\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 0$

Remarque:

e) $M = r_{O;-\alpha}(M')$; donc $\Gamma = r_{O;-\alpha}(\Gamma')$

On retiendra:

Pour construire $\Gamma : ax^2 + bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$, dans le R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(b\neq 0)$
on cherche α tel que: $(a - c)\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 0$
on a alors: $r_{O,\alpha}(\Gamma) = \Gamma'$, avec: $\Gamma' : Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + F = 0$
on construit Γ' (voir **V**)), puis on construit $\Gamma = r_{O;-\alpha}(\Gamma')$
(ou , on construit Γ' dans le repère $(O, r_{-\alpha}(\vec{i}), r_{-\alpha}(\vec{j}))$)

g) Remarque: Dans le plan, muni d'un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\Gamma : ax^2 + bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$
est: soit une parabole, soit une ellipse, soit une hyperbole,
toutes les autres formes obtenues sont appelées « coniques dégénérées »

2) Exercices: Dans le plan, muni d'un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Construire les courbes d'équations:

$\Gamma_1 : x^2 + \sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 5 = 0$; $\Gamma_2 : 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 14\sqrt{2}\,x + 18\sqrt{2}\,y + 26 = 0$

$\Gamma_3 : 11x^2 - 50\sqrt{3}\,xy - 39y^2 + (64-36\sqrt{3})x + (64\sqrt{3}+36)y - 604 = 0$

$\Gamma_4 : 3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + (12-2\sqrt{3})x + (2+12\sqrt{3})y - 47 = 0$

2) Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe d'équation: $xy = 1$