CH 3 – Géométrie :

Déplacements - antidéplacements

Novembre 2009
A. LAATAOUI

I. Symétries orthogonales et angles orientés :

Théorème :

Une symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Conséquences :

1. Une symétrie orthogonale transforme un repère orthonormé direct ………………………………………………
   ………..
2. La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales ………………………… les mesures des angles orientés.
3. La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales ………………………… les mesures des angles orientés ………………………………………………….

II. Définitions d'un déplacement et d'un antidéplacement :

Définition :

1. On appelle déplacement toute isométrie qui transforme un repère orthonormé direct en un repère orthonormé direct.
2. On appelle antidéplacement toute isométrie qui transforme un repère orthonormé direct en un repère orthonormé indirect.

Exemples :

- $Id_P, t_{\vec{u}}$ et $r_{(O,\alpha)}$ sont ……………………………………………………………………………………………
- S_Δ et $T_{\vec{u}} o S_\Delta$ avec $\vec{u}$ est un vecteur non nul directeur de la droite Δ sont ……………………………………

Théorème n°1 :

Soit f une isométrie du plan.

1. f est un déplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales.
2. f est un antidéplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.

Conséquences :

1. Si f et g sont deux déplacements alors f o g ……………………………………………………………………………
2. Si f et g sont deux antidéplacements alors f o g …………………………………………………………………………
3. Si f est un déplacement et g est un antidéplacement alors f o g ………………………………………………………
4. Si f est un déplacement alors f^{-1} …………………………………………………………………………………………..
5. Si f est un antidéplacement alors f^{-1} ……………………………………………………………………………………

Théorème n°2 :

f est une isométrie du plan.

1. f est un déplacement si et seulement si f conserve les mesures des angles orientés.
2. f est un andéplacement si et seulement si f change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

III. Déplacements :

1. Angle d'un déplacement :

Soit f un déplacement du plan.
Etant donnés deux points distincts A et B du plan d'images respectives A' et B' par f
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$ est appelée angle du déplacement f.

Exepmles :

- Si $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$ ....
  $\Rightarrow t_{\vec{u}}$ est un déplacement
  ....
- De même pour $l'id_{P}$.
- $S_O(A) = A'$ et $S_O(B) = B'$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$ ....
  $\Rightarrow S_O$ est un déplacement ....

Théorème :

Soient f un déplacement d'angle α et g un déplacement d'angle β alors :

- f o g est un déplacement d'angle ....
- f^{-1} est un déplacement d'angle ....

2. Classification des déplacements :

Une isométrie f est un <u>déplacement</u> si et seulement si f est la composée de <u>deux symétries orthogonales</u>
f = $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$.

Position de Δ et Δ'	Déplacement	Ensemble des points invariants	Angle
Δ = Δ'			
Δ // Δ'			
$\Delta \cap \Delta' = \{\Omega\}$			

Conséquences :

- Un déplacement ayant plus qu'un point fixe est ....
- Deux déplacements qui coincident en deux points distincts sont ....

3. Caractérisation d'un déplacement :

Théorème :

Soient A, B, C et D quatre points du plan vérifiant ***AB = CD et A ≠ B.***
Il existe un déplacement unique f du plan tel que f(A) = C et f(B) = D.

Déms :

Posons $\theta \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\ [2\pi]$.

- f = $t_{\overrightarrow{AC}}$ o $r_{(A,\theta)}$.

  f est un déplacement car ………………………………………………………………………………………………

  f(A) = ………

  f(B) = ………

- Supposons qu'il existe un déplacement g tel que g(A) = C et g(B) = D.

  f(A) = g(A), f(B) = g(B) et A ≠ B alors ……………………………………………………………………………

4. *Composition de déplacements :*

a) *Composée de deux translations :*

$t_{\vec{u}}$ o $t_{\vec{v}}$ = $t_{\vec{v}}$ o $t_{\vec{u}}$ = $t_{\vec{u}+\vec{v}}$

b) *Composée d'une rotation et d'une translation :*

Soit t une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et r une rotation d'angle $\theta \neq 2k\pi$.

t est ……………………………… d'angle …………………..

r est ……………………………… d'angle …………………

⇒ f = t o r et g = r o t sont deux ……………………………… d'angle …………………………..

⇒ f et g sont deux ………………………………… d'angle ………………..

c) *Composée de deux rotations :*

- Si r = $r_{(\Omega,\theta)}$ et r' = $r_{(\Omega,\theta')}$ alors r o r' = r' o r = ………………………………………

- Si r = $r_{(\Omega,\theta)}$ et r' = $r_{(\Omega',\theta')}$ tels que $\Omega \neq \Omega'$ alors :

  - Si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$ alors r o r' r et r' o r sont deux …………………………………

  - Si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$ alors r o r' et r' o r sont deux ……………………………………………

Conséquence : S_A o $S_{A'}$ = $r_{(A,\ldots\ldots)}$ o $r_{(A',\ldots\ldots)}$ = ………………………………………………………………………..

Exercices n°8, 11, 13, 14, pages 68 → 70

IV. Antidéplacements :

Théorème :

Etant donnés quatre points A, B, C et D du plan tels que **AB = CD ≠ 0**, alors il existe un antidéplacement unique ψ vérifiant ψ(A) = C et ψ(B) = D.

Déms :

AB = CD ≠ 0 ⇒ il existe un déplacement unique φ tel que φ(A) = C et φ(B) = D.

Posons $\psi = \varphi$ o $S_{(AB)}$.

Quelle est la nature de ψ ?

……

Déterminer les images de A et B par ψ.

……

……

Montrer que ψ est unique (utiliser un raisonnement par l'absurde).

……

………
………

Remarque :

Etant donnés quatre points A, B, C et D du plan tels que AB = CD $\neq$ 0, alors il existe exactement deux isométries transformant A en C et B en D l'une est un déplacement et l'autre est un antidéplacement.

Antidéplacements et points invariants :

Soit ψ un antidéplacement du plan.
Deux cas se présentent :

Inv (ψ) $\neq \varnothing$ ou Inv (ψ) = $\varnothing$.

1ér cas : Inv (ψ) $\neq \varnothing$.

ψ est un antidéplacement du plan qui admet au moins un point invariant A.

ψ est une isométrie telle que $\psi(A) = A \Rightarrow \psi = id_P$ ou $\psi = rot_A$ ou $\psi = S_\Delta$ avec $A \in \Delta$.

Or ψ est un antidéplacement $\Rightarrow \psi \neq id_P$ et $\psi \neq rot_A \Rightarrow \psi = S_\Delta$ avec $A \in \Delta$.

Théorème :

Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale d'axe Δ passant par ce point.

2ème cas : Inv (ψ) = $\varnothing$.

ψ est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants.

ψ est une isométrie sans points fixes $\Rightarrow \psi$ est soit une translation soit une symétrie glissante.

Or une translation est un déplacement donc ψ est une symétrie glissante.

Théorème :

Un antidéplacement sans points fixes est une symétrie glissante.

Exercices n° 12 et 23 pages 69 et 71.