Les suites réelles

4$^{\text{ème}}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

A°/ Les limites d'une suite :

Activité :

Soit la suite définie par : $U_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{2n+(-1)^n}$ pour $n \geq 1$.

1) Donner l'expression de U_{2n} et U_{2n+1} .

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_{2n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U_{2n+1}$. conclure .

Théorème :

Soit (U_n) une suite réelle et a fini ou infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = a$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} U_{2n} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U_{2n+1} = a$.

Exercice1 :

Etudier la convergence de la suite U définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = \dfrac{\cos(n\pi)+(-1)^n}{n}$.

Théorème :

Soit (U_n) une suite réelle convergente vers un réel a :

- Si $U_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$ alors $a \geq 0$.
- Si $U_n \leq 0$ pour tout $n \geq n_0$ alors $a \leq 0$.

Conséquences :

Soit un entier n_0 et (U_n) une suite tel que $m \leq U_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ où m et M deux réels

- Si (U_n) converge vers a alors $m \leq a \leq M$.

Opération sur les limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n+v_n$		$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n\times v_n$		$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n/v_n$
L	L'	L+L'		L	L'	L*L'		L	L' $\neq 0$	L / L'
$+\infty$	L'	$+\infty$		$+\infty$	L' $\neq 0$	∞ (r.signe)		∞	L' $\neq 0$	∞ (r.signe)
$-\infty$	L'	$-\infty$		∞	∞	∞ (r.signe)		L	$+\infty$	∞ (r.signe)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$						L	$-\infty$	∞ (r.signe)
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$						L $\neq 0$	0	∞ (r.signe)

Exercice2 :

Calculer les limites suivants : $\lim\limits_{x\to\infty} -n+\sqrt{\dfrac{5n+3}{2n+9}}$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$.

Théorème :

Soit (U_n) une suite géométrique définie par : $U_n = q^n$ pour $n \geq 0$. où $q \in IR^*$

* Si $q \succ 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = +\infty$.

* Si $|q| \prec 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 0$.

* Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n$ n'est pas définie .

* Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 1$.

Conséquences :

Pour tout réel $a \in]-1,1[$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} a^n = 0$.

Exercice3 :

Calculer les limites suivants : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi)^n$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$.

Exercice 4 :

Calculer les limites suivants : $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{3}{5}\right)^n$ pour $n \geq 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} -3-\frac{9}{\pi}-3\left(\frac{3}{\pi}\right)^2-\dots\dots-3\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$ pour $n \geq 0$.

B°/ Image d'une suite par une fonction continue :

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (U_n) une suite d'élément de I ; Si (U_n) converge ver un réel a de I alors $(f(U_n))$ converge vers $f(a)$.

Exercice5 :

Soit la suite U tel que $U_n = \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$, montrer que (U_n) converge vers 1.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite d'élément de I .

Si $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = l$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = L$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{x\to\infty}(f(U_n)) = L$.

Exercice 6 :

Calculer les limites suivants : $\lim\limits_{x\to\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

C°/ Limites et ordre :

Théorème :

* Soient deux suites U et V tel que $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{x\to\infty} V_n = l'$ si pour tout $n \geq n_0$ $U_n \leq V_n$ alors $l \leq l'$

* Soient deux suites U , V et W trois suites et $l \in IR$ tel que pour tout $n \geq n_0$ $U_n \leq V_n \leq W_n$; si $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{x\to\infty} W_n = l$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} V_n = l$

** Soient deux suites U et V tel que pour tout $n \geq n_0$ $|U_n| \leq V_n$ si $\lim\limits_{x\to\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 0$

Exercice 7 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\dots\dots+\frac{n}{n^2+n}$ pour $n \geq 1$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ en déduire $\lim\limits_{x\to\infty} U_n$.

Théorème :

Soient deux suites U et V

- S'il existe un n_0 tel que $U_n \leq V_n$ pour tout $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} V_n = +\infty$.

- S'il existe un n_0 tel que $U_n \le V_n$ pour tout $n \ge n_0$ et si $\lim\limits_{x\to\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = -\infty$.

Exercice 8 :

1) Vérifier que pour tout entier non nul k , $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2) En déduire la limite de la suite W définie par $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$, $n \ge 1$.

D°/ Convergence des suites monotones:

Théorème :

Soit (U_n) une suite définie pour $n \ge 0$.

* Si la suite (U_n) est croissante et majorée alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \ge 0$, $U_n \le a$.

* Si la suite (U_n) est décroissante et minorée alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \ge 0$, $U_n \ge b$.

Exercice 9 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$, $n \ge 1$.

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante .
2) Montrer que pour tout $n \ge 1$, $U_{2n} - U_n \ge \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire que la suite (U_n) est non majorée .et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

Théorème :

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

E°/ Suites récurrentes :

Théorème :

Soit (U_n) une suite vérifiant $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction .Si la suite (U_n) converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.

Exercice10 :

Soit U une suite récurrente définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.

1) Montrer que pour tout $n \ge 0$, $0 \le U_n \le 2$.
2) Montrer que (U_n) converge et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

F°/ Suites adjacentes :

Définition et théorème :

Deux suites U et V sont adjacentes lorsqu'elle vérifient les condition suivantes :

- Pour tout $n \ge 0$, $U_n \le V_n$.
- La suite U est croissante et V est décroissante .
- La suite $(V_n - U_n)$ converge vers 0 .

Dans ce cas les suites U et V converge vers la même limite .

Exercice 11 :

Soit la suite $U_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$. Et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que les suites U et V converge vers la même limite .