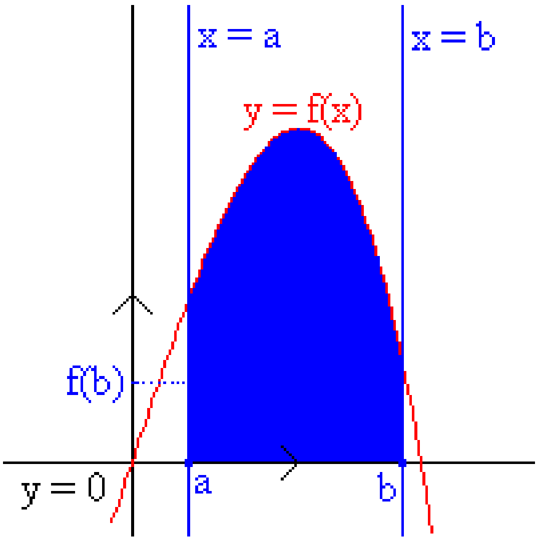
Intégrale d'une fonction continue et positive :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive sur $[a,b]$.

L'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisse et les droite d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b)-F(a)$ .le réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de a à b et noté $\int_a^b f(x)dx$.



Exercice1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

On considère la fonction $f: x \to x^3$.

1) Représenter ζ_f .

2) Calculer λ l'aire de la partie du plan limité par l'axe des abscisses , la courbe ζ_f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

Remarque :

Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de $F(a)-F(b)=G(a)-G(b)$.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de f entre a et b le réel , noté $\int_a^b f(x)dx$,

définit par $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$ .on lit : $F(x)$ pris entre a et b .

Vocabulaire et notation :

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a,b]$ ou encore de a à b ,ou encore ente a et b.
  .
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$ on dit que x est une variable muette .

Exercice2 :

Calculer $\int_0^1 \sin(\pi x)dx$ et $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Propriétés algébriques de l'intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I .Alors :

* $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

* $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (relation de chasles).

- Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ .pour tout réels α et β ,
  $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

Intégrales et inégalités :

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.Si f est positive sur $[a,b]$et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \succ 0$.

Corollaire (complaisons) :

Soit f ,g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ h .

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Exercice3 :

Activité 3 page 116.

Calculs d'intégrales :

Calcul au moyen d'une primitive :

Exercice4 :

Calculer les intégrale suivants : $\int_0^1 (x^3+2x-1)dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$, $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calcul au moyen d'une intégration par partie :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et tel que leurs dérivées f ' et g ' sont continue sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$.

Exercice5 :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$,

Valeur moyenne et inégalité de la moyenne :

Définition :

Soit f une fonction continue $[a,b]$ .on appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel , noté $\overline{f}$ définit par

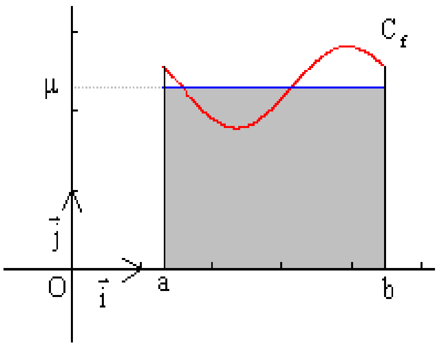
$$\overline{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple :

Donner la valeur moyenne de la fonction sin sur $[0,\pi]$

Remarque :

$\overline{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$ équivaut $(a-b)\overline{f} = \int_a^b f(x)\,dx$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisse et les droite d'équations $x=a$ et $x=b$ égale à l'aire du réctangle de coté $(b-a)$ et $\overline{f}$



Théorème :(inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue $[a,b]$.Soit m et M deux réels .

Si pour tout x de $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m \le \overline{f} \le M$

Corollaire :

Soit f une fonction continue $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$, tel que $\overline{f} = f(c)$.

Exercice6 :

Montrer que : $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le 1$.

Fonctions définies par une intégrale :

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .Alors la fonction F définie sur I Par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Conséquences :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .Alors la fonction F définie sur I Par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I .

Exercice7 :

Activité 1 page 122.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , U une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $U(J)\subset I$ et a un réel de I .alors la fonction F définie sur J par $F(x)=\int_a^{U(x)} f(t)dt$ Est dérivable sur J et $F'(x)=f(U(x)).U'(x)$ pour tout x de J .

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centrer en 0 et soit a un réel de I

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

Soit f une fonction continue sur IR , périodique de période T

- Pour tout réel a , $\int_{-a}^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

Exercice8 :

Calculer $\int_{-1}^{1}\frac{t^5}{t^6+1}dt$. $\int_{-1}^{1}\left|t^3+t\right|dt$.

Calcul d'aire :

Théorème :

Soit f une fonction continue $[a,b]$et ζ_f sa courbe sa courbe représentative dans un repère orthogonal .L'aire de la partie $\boldsymbol{D}$ du plan limitée par ζ_f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est $A(D)=\int_a^b |f(x)|dx.(u.a)$.

- Si $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$ alors $A(D)=\int_a^b f(x)dx.(u.a)$.
- Si $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a,b]$ alors $A(D)=-\int_a^b f(x)dx.(u.a)$.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telle que $f(x)\leq g(x)$de courbe respectives ζ_f et ζ_g dans un repère orthogonal .L'aire de la partie $\boldsymbol{D}$ du plan limitée par ζ_f , ζ_g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est $A(D)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.(u.a)$.

Calcul de volume de solide de révolution :

Théorème :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ .Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $AB=\{M(x,y)\,tels\ que\ y=f(x)et\ a\leq x\leq b\}$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$ est le réel $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$