Fonction exponentielle	
$4^{\text{ème}}$ math	***B.H.Hammouda Fethi***

I / Définition et propriété :

Définition :

On appelle ***fonction exponentielle*** la fonction réciproque de la fonction ***logarithme Népérien*** noté $x \to e^x$.

Conséquence1 :

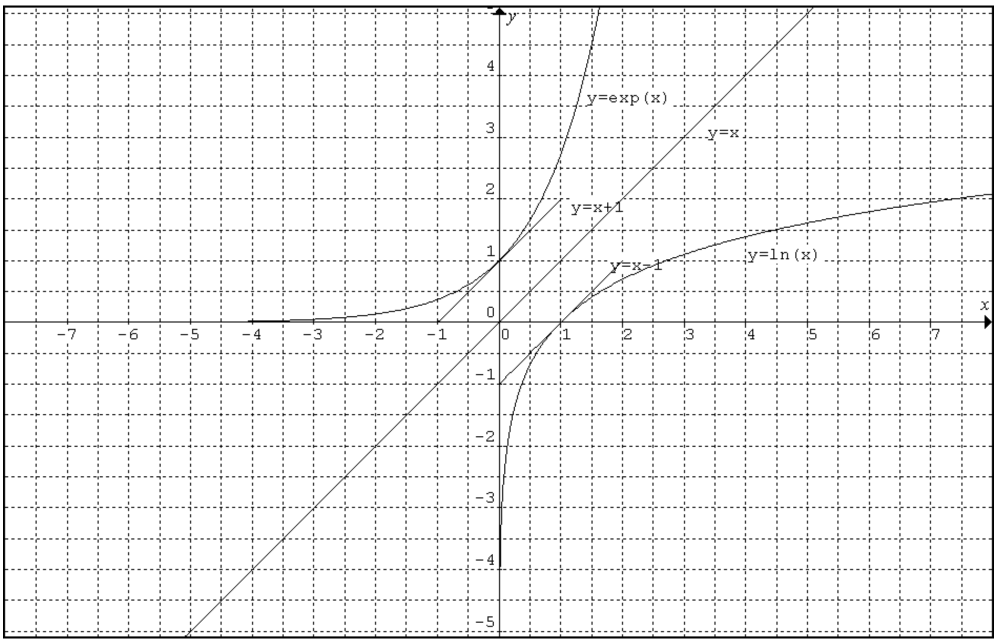
- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y , $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x , $\ln\left(e^x\right) = x$
- $\ln e = 1$.
- $e^0 = 1$

Conséquence2 :

En utilisant la définition on peut constater que :

- La fonction $x \to e^x$ est définie continue et ***strictement croissante*** sur IR .
- La fonction $x \to e^x$ est bijective de IR sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \succ 0$.
- On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} Lnx = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

D'où la courbe de la fonction $x \to e^x$.



Remarque :

- la courbe de la fonction $x \to e^x$ admet une branche infinie parabolique de direction (yy') alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

- la courbe de la fonction $f : x \to e^x$ admet une tangente au point d'abscisse 0 de coefficient directeur 1 alors la fonction $f : x \to e^x$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$.

II / Limites usuelles :

* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

* $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Soit m et n deux entiers naturels non nuls , $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^m e^{nx} = 0$.

Propriétés algébriques :

Soit deux réels a et b , $n \in \mathbb{Z}$.

* $e^{a+b} = e^a.e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

- Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.
- Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et pour tout entier p , $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité5 page 160 :

Théorème :

La fonction $f : x \to e^x$ est dérivable sur IR et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = e^x$.

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

L fonction $h : x \to e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ pour $x \in I$.

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les primitives sur I de la fonction $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $G : x \to e^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Activités 2,3,4,6 page 164 :

III/ Exponentielle de base a :

Soit un réel $a \succ 0$, pour tout réel b , on pose $a^b = e^{b\ln a}$

Propriétés :

Pour tout nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d ,

$a^{c+d} = a^c.a^d$, $\left(a^c\right)^d = a^{cd}$, $a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$, $a^c.b^c = (ab)^c$, $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$.

Définition :

Soit un réel $a \succ 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \to a^x = e^{x\ln a}$.

Conséquence :

* Soit un réel $a \succ 0$. La fonction $x \to a^x$ est dérivable sur IR et sa fonction dérivée est la fonction $x \to (\ln a)a^x$.

- Si $a \succ 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 \prec a \prec 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Activité6 page 168 :

IV/ Fonctions puissances :

Soit r un rationnel . On appelle fonction puissance r la fonction $x \to e^{r \ln x}$, $x \succ 0$.

Conséquence :

- Si $r \succ 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$.
- Si $r \succ 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$.

Théorème :

Soit r un rationnel . La fonction $x \to x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \to rx^{r-1}$.

Théorème :

Soit r un rationnel différent de -1 . les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \to x^r$ sont les fonctions $x \to \dfrac{1}{r+1} x^{r+1}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Soit r un rationnel strictement positif .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty .$$