

Probabilité continue

1. Densité de probabilité

Définition

On appelle densité de probabilité sur un intervalle I toute fonction f continue et positive sur I telle que :

- $\int_a^b f(x)dx = 1$ si $I = [a, b]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$ si $I = [a, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt = 1$ si $I =]-\infty, a]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt + \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t)dt = 1$ si $I = \mathbb{R}$

Exercice 1

Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$).

Déterminer sa valeur pour qu'elle soit une densité de probabilité sur $[a, b]$

Solution

Posons $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in [a, b]$

f est une densité de probabilité sur $[a, b]$ ssi $\int_a^b f(t)dt = 1$

$$\int_a^b \lambda dt = 1 \Leftrightarrow \lambda(b - a) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{b - a} \text{ donc pour tout } x \in [a, b], f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Exercice 2

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0, +\infty[$

Solution

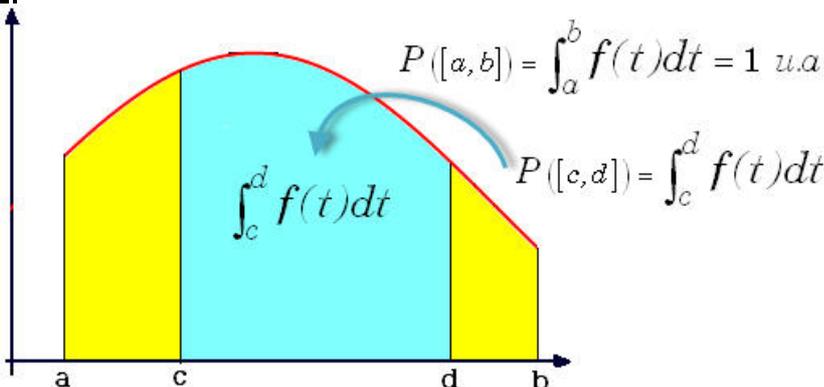
Soit $x \in [0, +\infty[$; $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$ **cqfd**

2. Loi de probabilité continue

Définition

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I . L'application P qui, à tout sous-intervalle $[c, d]$ de I associe $P([c, d]) = \int_c^d f(t)dt$ est appelée loi de probabilité sur I



Remarques

- Pour tout x_0 de I on a : $P(\{x_0\}) = P([x_0, x_0]) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$

On dit que l'événement $\{x_0\}$ est « quasi-impossible »

Ainsi on a : $P([c, d]) = P([c, d[) = P(]c, d]) = P(]c, d[)$

- Si on note $\overline{[c, d]} = \{x \in I \text{ et } x \notin [c, d]\}$: complémentaire de $[c, d]$ dans I ; on a :

$$P(\overline{[c, d]}) = 1 - P([c, d]) = 1 - \int_c^d f(t)dt$$

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles

en particulier si J et K sont deux intervalles inclus dans I tels que $J \cap K = \emptyset$ alors $P(J \cup K) = P(J) + P(K)$

Cas particuliers

- Si f est une densité de probabilité constante sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) (donc

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \text{ voir exercice 1) on dit que P est la loi uniforme}$$

- Si f est définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec ($\lambda > 0$) on dit que P est la loi exponentielle de paramètre λ

3. Variable aléatoire continue

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de \mathbb{R} . On dit alors que la variable est **continue**. On s'intéresse à des événements du type: «X est compris entre les réels a et b» soit « $a \leq X \leq b$ ».

Exemples : le temps d'attente à un arrêt de bus, la durée de vie d'une machine, la distance du point d'impact au centre d'une cible circulaire etc.

Définition (loi de probabilité d'une variable aléatoire continue)

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de densité f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit la loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[c, d]$ de I, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = P([c, d]) = \int_c^d f(t)dt$$

4. Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a, b]$ (ou de la forme $[a, +\infty[$), qui suit une loi de probabilité P.

On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie pour tout x de I par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Conséquences

- Si $I = [a, b]$ ou $I = [a, +\infty[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(a \leq X \leq x) = \int_a^x f(t)dt$
donc f est dérivable sur I et on a : $F' = f$
- F est croissante sur I (car f est une densité de probabilité sur I donc positive sur I)
- $F(a)=0$; $F(b)=1$ si $I = [a, b]$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ si $I = [a, +\infty[$
- Pour tout $x \in I$; $F(X > x) = 1 - F(x)$
- Pour tout intervalle $[c, d] \subset I$; $P(c < X \leq d) = P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)$

5. Loi uniforme

Si X est une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ et si c et d sont deux réels tels que : $[c, d] \subset [a, b]$ alors on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{longueur de } [c, d]}{\text{longueur de } [a, b]}$$

Sa fonction de répartition F définie sur $[a, b]$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Exemple1

On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$
Quelle est la probabilité d'avoir le premier chiffre après la virgule égal à 3 ?

Réponse

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre choisi dans l'intervalle $[0, 1]$.
Comme le choix se fait au hasard dans $[0, 1]$, on peut dire que X suit la loi uniforme sur cet intervalle et sa densité est la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1$

La probabilité d'avoir le premier chiffre après la virgule égal à 3 est alors le réel

$$p = P(0,3 \leq X < 0,4) = P(0,3 \leq X \leq 0,4) = \int_{0,3}^{0,4} 1dt = 0,1$$

Exemple 2

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

Réponses

La variable aléatoire X est le temps uniformément réparti sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

donc sa densité est la fonction f définie sur $[0, 30]$ par : $f(x) = \frac{1}{30}$

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. On a donc

$$P(10 \leq X \leq 15) + P(25 \leq X \leq 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dt + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

2. De même on a : $P(0 \leq X \leq 5) + P(15 \leq X \leq 20) = \frac{1}{3}$

6. Loi exponentielle

Définition

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité P de densité la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$) on dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ (appelée aussi **loi de durée de vie sans vieillissement**).

- Pour tous réels positifs a et b on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- La fonction F de répartition de X définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ appelée aussi fonction de **défaillance** (c'est la probabilité qu'un appareil tombe en panne avant t années)
- Pour tous réels positifs t et s on a : $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$
C-à-d : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne plus que t années après sa mise en service (C'est la durée de vie sans vieillissement non ?)

Exemple

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0,1$.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie

b) On sait qu'une voiture a durée déjà 10 ans.

Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

c) Calculer la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

Réponses

a) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} 0,1 e^{-0,1t} dt = e^{-1}$

b) $P(X > 12 \mid X > 10) = \frac{P((X > 12) \cap (X > 10))}{P(X > 10)} = \frac{P(X > 12)}{P(X > 10)} = \frac{e^{-0,1 \times 12}}{e^{-0,1 \times 10}} = e^{-0,2}$

c) $P(X > 2) = e^{-0,1 \times 2} = e^{-0,2}$

Remarque : La durée de vie de la voiture ne dépend pas de son âge