CHAPITRE : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(E) $y' = a\ y + b$ *avec* $a \neq 0$ est dite équation différentielle du premier ordre car elle ne fait intervenir que la fonction inconnue y et sa dérivée première y'

(E) est dite à coefficients constants car a et b sont des constantes.

1- Introduction

Soit I un intervalle donné. On se propose de déterminer les fonctions f (en général toutes les fonctions f) définies et une fois dérivable sur I telles que

$\text{pour tout}\, x \in I \quad f'(x) = a\ f(x) + b \quad \text{avec} \quad a \neq 0$

(E) est dite linéaire car si f_1 *et* f_2 sont des solutions de (E) et si k est un réel quelconque, $k\, f_1 + f_2$ est aussi solution de (E)

1.1. Solution générale

Rechercher toutes les fonctions qui vérifient cette relation, c'est résoudre dans I l'équation différentielle ou encore trouver la solution générale de l'équation différentielle.

$$y' = a\ y + b \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

1.2. Solution soumise à une condition initiale

Parmi les solutions, on cherche celle(s) qui satisfont à la condition (dite condition initiale) $f(x_0) = y_0$ où x_0 *et* y_0 sont deux réels donnés.

2. Equation différentielle $y' = a\,y$ *avec* $a \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y' = a\,y$ *avec* $a \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f_k telles que *pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $f_k(x) = k\,e^{ax}$ *où* $k \in \mathbf{R}$

3. Equation différentielle $y' = a\,y + b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f_k telles que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_k(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ *où* $k \in \mathbf{R}$

Propriétés

Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ admet une solution f et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $2\,y' + 3y = 0$

On écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = -\dfrac{3}{2}y$

Les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les fonctions définies *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ par $f_k(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$ *avec* $k \in \mathbf{R}$

Exemple

Trouver la solution *f* de l'équation différentielle $2\,y' + 3y = 0$ telle que $f(2) = 1$

D'après l'exercice précédent , les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les fonctions

$$f_k(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x} \quad avec \;\; k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition initiale $f(2)=1$ soit $f_k(2) = k\,e^{-3} = 1 \quad soit \;\; k = e^3$

Il existe une seule fonction f_{e^3} répondant au problème

Ainsi, la solution f de $2y'+3y=0$ telle que $f(2)=1$ est la fonction $f_{e^3} = e^3\,e^{-\frac{3}{2}x} = e^{3(1-\frac{1}{2}x)}$

Exemple

(E) est l'équation différentielle $y' = -2y+5$

Résoudre (E) et déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=2$

Les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions

$$f_k(x) = k\,e^{-2x} + \frac{5}{2} \quad avec \;\; k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition $f(0)=2$ soit $f_k(0) = k + \frac{5}{2} = 2 \;\; et \;\; donc \;\; k = -\frac{1}{2}$

Il existe donc une seule fonction $f_{-\frac{1}{2}}$ répondant au problème.

La solution de $y' = -2y+5$ telle que $f(0)=2$ est la fonction

$$f_{-\frac{1}{2}} : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{5}{2}$$

Remarque

Un grand nombre de problèmes physiques conduisent à des équations différentielles linéaires du second ordre. Parmi celles-ci nous envisageons le cas des équations différentielles du second ordre à coefficients constants de la forme $y'' + \omega^2 y = 0 \;\; avec \;\; \omega \in \mathbf{R}^*$

Théorème

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0 \;\; avec \;\; \omega \in \mathbf{R}^*$ est l'ensemble des fonctions f_{k_1,k_2} telles que *pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $f_{k_1,k_2}(x) = k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x$ *avec* $k_1 \in \mathbf{R}$, $k_2 \in \mathbf{R}$

Remarque

On peut aussi écrire les solutions sous la forme

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_{A,\varphi}(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ *avec* $A \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{R}$

Exemple

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$
2. Trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions $f(0) = 1$ et $f'(\pi) = -2$

1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$f_{k_1,k_2}(x) = k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x \quad avec \quad k_1 \in \mathbf{R},\ k_2 \in \mathbf{R}$$

2. Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes k_1 *et* k_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0) = 1$ est équivalente à $f(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = k_1 = 1$ soit $k_1 = 1$

De même, nous avons pour tout réel x,

$$f'(x) = -3k_1 \sin 3x + 3k_2 \cos 3x$$

La condition $f'(\pi) = -2$ est équivalente à $f'(\pi) = -3k_1 \sin 3\pi + 3k_2 \cos 3\pi = -3k_2 = -2$

soit $k_2 = \dfrac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction

$$f_{1,\frac{2}{3}} : x \mapsto \cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x$$