

# Les fonctions exponentielles

## Définitions et théorèmes :

Par définition, La fonction exponentielle est bijection réciproque de la fonction  $\ln$ .

On la note  $\exp$ . Pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) = e^x$

### Règles de calculs :

$$e^0 = 1 \quad e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

## Étude et représentation graphique de la fonction exponentielle :

### a) Sens de variation :

La fonction exponentielle est dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(x) = \exp'(x)$  d'où  $\exp'(x) > 0$  donc la fonction exponentielle est strictement croissante. On dit que la fonction exponentielle est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

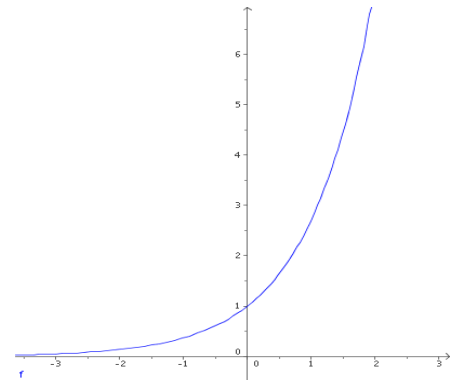
### Conséquences :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad ; \quad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y \quad ; \quad \forall x \in ]-\infty; 0[, \quad 0 < e^x < 1 \quad ; \quad \forall x \in ]0; +\infty[, \quad e^x > 1$$

### b) Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



### c) Autres limites importantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{donc en particulier pour } n=1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{donc en particulier pour } n=1 : \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## Fonctions exponentielles de base a (a > 0) :

### a) Définition :

On appelle fonction exponentielle de base a ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ) la fonction qui se note  $x \rightarrow \exp_a(x)$  ou  $x \rightarrow a^x$ .  $a^x = e^{x \ln(a)}$

Par conséquence :  $\forall b \in \mathbb{R}$  et  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$

$$a^b = e^{b \ln(a)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(a^b) = b \ln(a)$$

### b) Étude de variation :

Soit  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ )

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln(a)} > 0$  donc  $f'_a(x)$  est du signe de  $\ln(a)$ .

Donc 3 cas possibles :

**Si a = 1 :**  $f_a$  est la fonction  $x \rightarrow 1$ .

**Si a > 1 :**

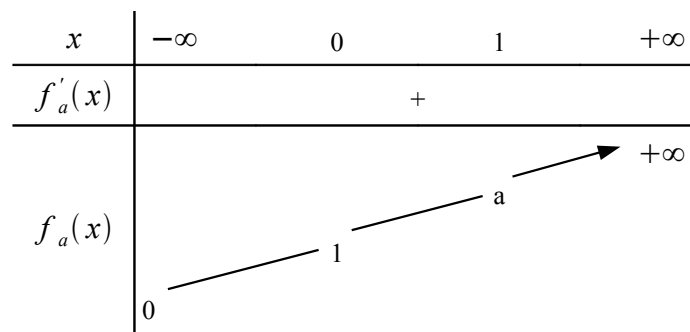
$\ln(a) > 0$  donc :

$f'_a > 0$  et donc la fonction  $f_a$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

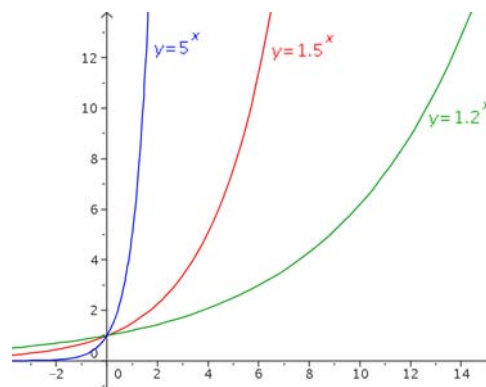
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(a) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(a) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

On en déduit donc ce tableau de variation :



Exemples :



**Si  $0 < a < 1$  :**

$\ln(a) < 0$  donc :

$f'_a < 0$  et donc la fonction  $f_a$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

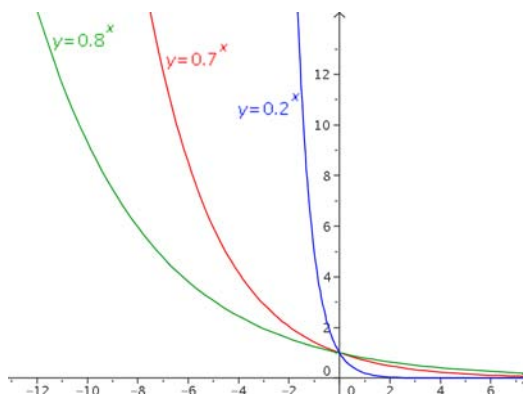
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(a) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(a) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

On en déduit donc ce tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'_a(x)$			+	
$f_a(x)$	$+\infty$		$1$	$a$
				$0$

Exemples :



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions  $x \rightarrow a^x$  et  $x \rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x$  avec  $a > 0$  sont symétriques d'axe la droite d'équation  $x=0$ . En effet,  $a^x = e^{x \ln(a)}$  et  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{1}{a}\right)} = e^{-x \ln(a)}$ .

**c) Primitives :**

Les fonctions  $x \rightarrow a^x$  admettent pour primitives les fonctions  $x \rightarrow \frac{1}{\ln(a)} a^x + C$  avec  $C$  une constante réelle,  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ . (Si  $a=1$  alors les primitives sont les fonctions  $x \rightarrow x + C$ )

**d) Règles de calcul :**

Les règles de calcul sont les mêmes qu'avec la fonction exponentielle qui n'est en fait qu'un cas particulier : ( $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs)

$$a^0=1 \quad a^{x+y}=a^x \times a^y \quad a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y} \quad (a^x)^n=a^{nx} \quad \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (ab)^x=a^x b^x$$

## Fonctions puissance :

### a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_\alpha = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ .

### b) Étude de variation :

$f_\alpha$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f'_\alpha(x) = (\alpha \ln(x))' x^\alpha = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Sens de variation :

Si  $\alpha > 0$  alors  $f'_\alpha(x) > 0$  et donc  $f_\alpha$  est strictement croissante.

Si  $\alpha < 0$  alors  $f'_\alpha(x) < 0$  et donc  $f_\alpha$  est strictement décroissante.

Limites :

Si  $\alpha > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(x) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$$

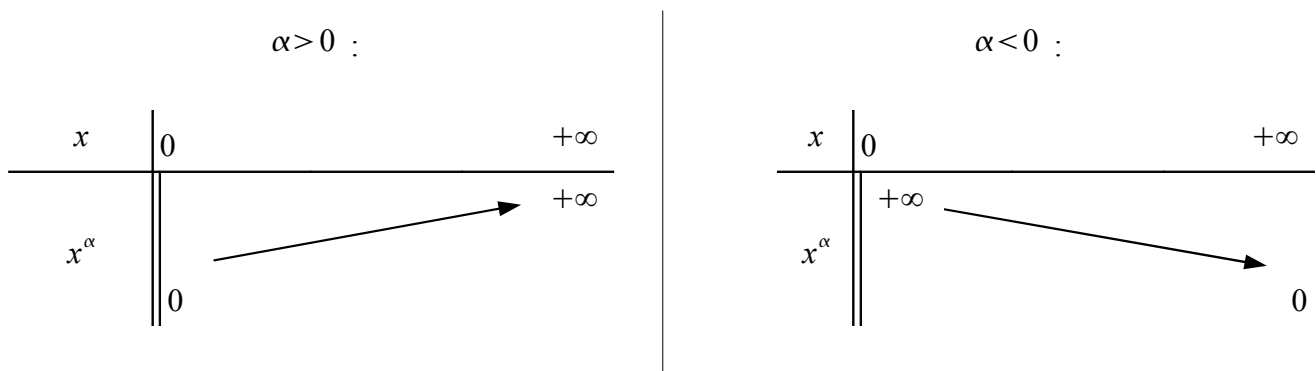
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Si  $\alpha < 0$  :

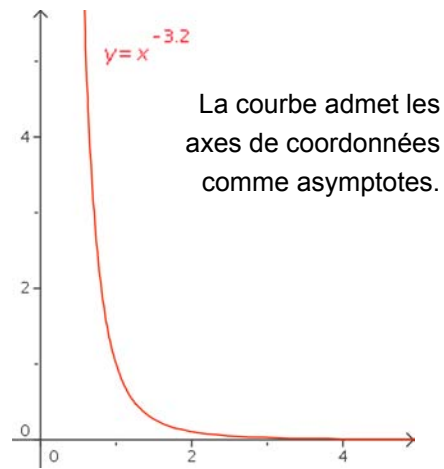
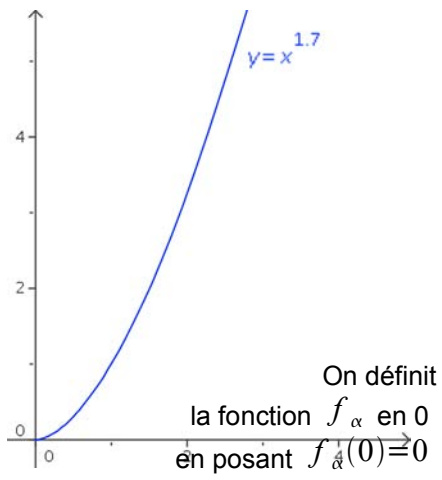
$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Tableaux de variations :



Représentation graphique :



Visitez **Tunisie-Mathématiques** à l'adresse **<http://tunimath.clanfree.net>**