Isométrie et transformations complexes

Dans ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

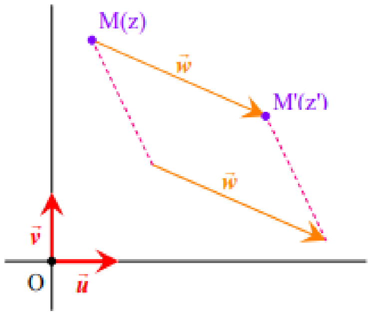
Tout point M du plan de coordonnées $(x_M;y_M)$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est associé de manière unique au nombre complexe $z_M = x_M + i \times y_M$. Et réciproquement !

On dit alors que le nombre complexe z_M est l'affixe du point M.

De la même façon que l'on identifie une droite munie d'un repère $(O;\vec{u})$ à l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, on peut identifier le plan muni repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ à l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$. Ce faisant, toutes les applications f du plan dans lui-même sont d'un point de vue complexe, des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$...auxquelles on peut éventuellement donner une expression. C'est cela que l'on appelle <u>écriture complexe</u> d'une transformation.

Ecriture complexe d'une translation

Soit M un point du plan d'affixe z et $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan.
On appelle M' l'image du point M par la translation t de vecteur $\vec{w}$.
Exprimons l'affixe z' de M' en fonction de z.



Dire que M' est l'image de M par la translation t de vecteur $\vec{w}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{w}$ sont égaux.
Deux vecteurs égaux ayant leurs affixes égales, il vient :

$$t(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{w} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}}=z_{\vec{w}} \Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{w}} \Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{w}}$$

De cette équivalence, on déduit le théorème suivant.

Théorème : écriture complexe d'une translation
L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{w}$ est : $t(z)=z'=z+z_{\vec{w}}$.
Réciproquement, la transformation du plan f qui a pour écriture complexe $\underbrace{f(z)}_{\text{ou } z'}=z+b$
où b est un nombre complexe, est la translation de vecteur d'affixe b.

Par exemple, l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ d'affixe $1+i$ est :

$$\underbrace{z'}_{\text{ou } t(z)}=z+1+i$$

Note : une translation de vecteur non nul n'a aucun point fixe ou invariant, c'est-à-dire aucun point qui soit sa propre image.

Ecriture complexe d'une homothétie

Soient M et Ω deux points du plan d'affixes respectives z et ω.
On appelle M' l'image du point M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.
Pour que l'homothétie h ait un sens, k est un réel non nul.
Exprimons l'affixe z' du point M' en fonction de z.

Dire que le point M' est l'image de M par l'homothétie h signifie que $\overrightarrow{\Omega M'}=k\times\overrightarrow{\Omega M}$.
Traduisons sous forme complexe cette égalité vectorielle.

$$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\times\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}}=k\times z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z'-\omega=k\times(z-\omega)$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème : écriture complexe d'une homothétie
L'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω d'affixe ω, et de rapport k est :

$$z'-\omega=k\times(z-\omega) \Leftrightarrow \underbrace{h(z)}_{z'}=k\times(z-\omega)+\omega=k\times z+(1-k)\times\omega$$

Réciproquement, quelle est la nature de la transformation du plan f dont l'écriture complexe est :

$$f(z)=z'=k\times z+b$$

où k est un réel non nul et b un nombre complexe ?
Deux cas sont à envisager :

- Si $k=1$ alors cette écriture complexe de f devient : $f(z)=z'=z+b$
  f est alors la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $k\neq 1$ alors le complexe b peut être divisé par la quantité non nulle $1-k$.
  On pose $\omega=\dfrac{b}{1-k} \Leftrightarrow b=(1-k)\times\omega$. Il vient alors :
  $$f(z)=z'=k\times z+b=k\times z+(1-k)\times\omega$$
  Ce qui s'écrit encore :
  $$z'=k\times z+\omega-k\times\omega \Leftrightarrow z'-\omega=k\times(z-\omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\times\overrightarrow{\Omega M}$$

Théorème : reconnaître les transformations qui sont des homothéties
Si l'expression complexe de la transformation du plan f est :

$$f(z)=z'=k\times z+b$$

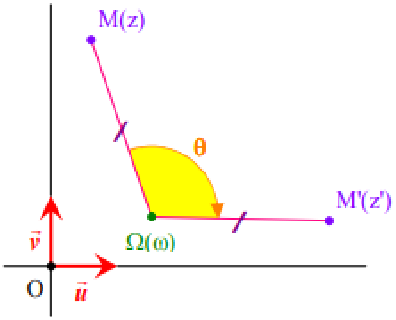
où k est un réel différent de 0 et 1 et, b un nombre complexe
alors f est l'homothétie de rapport k et de centre le point d'affixe $\omega=\dfrac{b}{1-k}$.

Note : une homothétie de rapport différent de 1 a un unique point invariant : son centre.

Professeur Mr Kamel Bel Asri

Expression complexe d'une rotation

Soient M et Ω deux points distincts du plan d'affixes respectives z et ω.
On appelle M' l'image du point Mpar la rotation ***r*** de centre Ω et d'angle θ.
Exprimons l'affixe z' de M' en fonction de z.



Dire que le point M' est l'image de M par la rotation ***r*** signifie deux choses :

- D'abord, les longueurs ΩM et $\Omega M'$ sont égales.

  Donc : $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$

- Ensuite, la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ mesure θ radians.

  Par conséquent : $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$

Autrement dit, nous avons établi l'équivalence :

$$\left.\begin{array}{l}\text{M' a pour image M} \\ \text{par la rotation } \boldsymbol{r}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Le complexe } \frac{z'-\omega}{z-\omega} \text{ a pour module 1 et pour argument } \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 \times e^{i.\theta} \Leftrightarrow z'-\omega = e^{i.\theta} \times (z-\omega)$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème : écriture complexe d'une rotation
L'écriture complexe de la rotation ***r*** de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est :

$$z'-\omega = e^{i.\theta} \times (z-\omega) \Leftrightarrow \boldsymbol{r}(z) = e^{i.\theta} \times (z-\omega) + \omega = e^{i.\theta} \times z + \left(1 - e^{i.\theta}\right) \times \omega$$

A propos du centre Ω
Dans notre cavalcade, nous avons imposé que le point M soit distinct du centre Ω.
Maintenant, l'écriture complexe trouvée s'applique-t-elle aussi lorsque $M = \Omega$?
La réponse est oui, car l'image M' de M est alors...Ω et donc $\omega - \omega = 0 = e^{i.\theta} \times (\omega - \omega)$.
Note : si $\theta \not\equiv 0$ modulo 2π, le centre Ω est le seul point fixe ou invariant de la rotation ***r***.

Réciproquement, quelle est la nature de la transformation ***f*** dont l'écriture complexe est :

$$\boldsymbol{f}(z) = z' = a \times z + b$$

où a est un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe quelconque ?

Là encore, deux cas sont à envisager :

- Si $a = 1$ alors l'écriture complexe de ***f*** devient : $\boldsymbol{f}(z) = z' = z + b$
  Par conséquent, ***f*** est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ alors en notant α l'un de ses arguments, nous avons : $a = e^{i.\alpha}$.
  Comme a est différent de 1, b est divisible par la quantité non nulle $1-a$.

  On pose $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{b}{1-e^{i.\alpha}} \Leftrightarrow b = (1-a) \times \omega$. Il vient alors :

  $$\boldsymbol{f}(z) = z' = a \times z + b = e^{i.\alpha} \times z + \left(1 - e^{i.\alpha}\right) \times \omega$$

  On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème : reconnaître les transformations qui sont des rotations
Si l'expression complexe de la transformation du plan ***f*** est :

$$\boldsymbol{f}(z) = z' = a \times z + b$$

où $a \neq 1$ est un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe quelconque.

alors ***f*** est la rotation de centre le point d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle un argument α du complexe a.

Expression complexe de l'application identique du plan

L'application identique du plan est la transformation notée ***Id*** qui à tout point du plan associe...lui-même. Avec elle, rien ne bouge.
On peut voir cette application identique ***Id*** comme une translation de vecteur nul, comme une homothétie de rapport 1 ou encore comme une rotation d'angle nul.

Conclusion : l'écriture complexe de l'application identique ***Id*** du plan est $\boldsymbol{Id}(z) = z' = z$.

Expression complexe d'une symétrie centrale

Dire que le point M' est l'image du point M par la symétrie ***s*** de centre Ω signifie que Ω est le milieu du segment [MM'], autrement dit : $\overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'}$.
Il vient alors en reprenant les notations des paragraphes précédente :

$$\boldsymbol{s}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'} \Leftrightarrow \omega - z = z' - \omega \Leftrightarrow z' = -z + 2.\omega$$

Conclusion : l'écriture complexe de la symétrie ***s*** de centre Ω d'affixe ω est

$$\boldsymbol{s}(z) = z' = -z + 2.\omega$$

Une symétrie centrale est aussi une homothétie de rapport -1 ou une rotation d'angle $\pm\pi$