Tél 27677722

Bon courage

1

① Définition de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$

On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$ et vérifiant:

- ✔ il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$
- ✔ tout élément z de de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a, b sont des réels
- ✔ une addition et une multiplication sont définies sur $\mathbb{C}$ ayant les mêmes propriétés que celles de l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

◆ ***Vocabulaire***

- Si $z = a + ib$ (a et b réels) alors a est la partie réelle de z notée $\Re e(z)$ et b est la partie imaginaire de z notée $\Im m(z)$.
- $a + ib$ est la forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe
  z est dit réel ssi $b = 0$ et on retrouve ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
  z est dit imaginaire pur ssi $a = 0$.

◆ ***Conséquence***

- $a+ib = x+iy$ (a, b, x, y réels) si et seulement si $a = x$ et $b = y$.
  En particulier $a+ib = 0$ ssi $a = b = 0$.
- $(a+ib)+(x+iy) = (a+x)+i(b+y)$; a, b, x, y sont des réels.
- $(a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$
- $z = a+ib$; $-z = -a-ib$ = opposé de z; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- $z = a+ib$ (avec a; b réels vérifiant $a^2+b^2 \neq 0$)

  $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ est l'inverse de z.

② Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe. On pose $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe $\overline{z} = a-ib$.

◆ ***Propriétés***

✔ $\Re e(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\Im m(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

✔ z est réel équivaut à $z=\overline{z}$.
z est imaginaire pur équivaut à $z=-\overline{z}$.

✔ $\overline{\overline{z}}=z$

✔ Pour tous nombres complexes z et z'; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$

$\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ $n\in\mathbb{N}^*$

$\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, z' est un nombre complexe non nul.

③ Module d'un nombre complexe

Soit z = a + ib un nombre complexe, on appelle module de z le réel positif noté $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$

◆ ***Propriétés***

Pour tous nombres complexes z et z' on a:

✔ $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

✔ $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$; $|z^n|=(|z|)^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

✔ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z\neq 0$

✔ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

✔ $\Re e(z)\leq|z|$; $\Im m(z)\leq|z|$

Remarques

- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour tout z non nul.
- si z = z' alors $|z|=|z'|$ mais si $|z|=|z'|$ on n'a pas nécessairement z = z'.
- $|z|=1\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

- ***Propriétés***

✔ $\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

✔ z est réel équivaut à $z = \overline{z}$.
z est imaginaire pur équivaut à $z = -\overline{z}$.

✔ $\overline{\overline{z}} = z$

✔ Pour tous nombres complexes z et z′; $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{z\cdot z'} = \overline{z}\cdot\overline{z'}$

$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, z′ est un nombre complexe non nul.

③ Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle module de z le réel positif noté $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$

- ***Propriétés***

Pour tous nombres complexes z et z′ on a:

✔ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

✔ $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$; $|z^n| = (|z|)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

✔ $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$

✔ $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

✔ $\Re e(z) \leq |z|$; $\Im m(z) \leq |z|$

Remarques

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour tout z non nul.
- si $z = z'$ alors $|z| = |z'|$ mais si $|z| = |z'|$ on n'a pas nécessairement $z = z'$.
- $|z| = 1 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

④ Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé plan complexe.

Tout nombre complexe $z = a + ib$ est représenté par le point M de coordonnées (a,b) dans P. On dit que M est l'image de z dans P et z est l'affixe du point M ou l'affixe du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a,b).

$(O, \vec{e}_1)$ est l'axe réel, $(O, \vec{e}_2)$ est l'axe imaginaire

$|z| = OM$

Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Soient $A \in P$ d'affixe z_A et $B \in P$ d'affixe z_B ; on a:

$Aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$ et par suite $|z_B - z_A| = AB$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan complexe et α, β deux réels

$Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha Aff(\vec{u}) + \beta Aff(\vec{v})$

⑤ Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

◆ *Argument d'un nombre complexe non nul*

Définition

Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nul.

Une mesure α de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ est dite un argument de z noté argz et on écrit $\arg z \equiv \alpha\ [2\pi]$.

L'écriture $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est dite: forme trigonométrique du nombre complexe z.

Relation entre forme algébrique et forme trigonométrique:

Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$\Re e(z) = r\cos\alpha$ et $\Im m(z) = r\sin\alpha$

Si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a^2 + b^2 \neq 0$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos\alpha = \frac{a}{r}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{r}$

◆ *Conséquences*

$z = z'$ équivaut $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z \equiv \arg z'\ [2\pi] \end{cases}$; z et z' sont non nuls.

◆ *Notation* $e^{i\theta}$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$

Conséquences:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad ; \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

ces deux dernières formules sont les formules d'Euler.

◆ *Forme exponentielle*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\arg z \equiv \alpha\ [2\pi]$
l'écriture $z = |z|e^{i\alpha}$ s'appelle: forme exponentielle de z.

Forme polaire:
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\arg z \equiv \alpha\ [2\pi]$ et $|z| = r \in \mathbb{R}_+^*$, l'écriture $z = [r;\alpha]$ s'appelle: forme polaire de z.

Remarque.

$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0\ [\pi]$
$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0\ [2\pi]$
$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi\ [2\pi]$

z est non nul et z imaginaire signifie $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

z est non nul et z est imaginaire et $\Im m(z) > 0$ signifie $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

z est non nul et z est imaginaire et $\Im m(z) < 0$ signifie $\arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

◆ *Propriétés*

Pour tous z et z' complexes non nuls, pour tous α et α' réels on a:

- ✓ $\arg \bar{z} \equiv -\arg z\,[2\pi]$ et $\overline{\left(e^{i\alpha}\right)} = e^{-i\alpha}$
- ✓ $\arg(-z) \equiv \arg z + \pi\,[2\pi]$ et $e^{i(\alpha+\pi)} = -e^{i\alpha}$
- ✓ $\arg(z\cdot z') \equiv \arg z + \arg z'\,[2\pi]$ et $e^{i(\alpha+\alpha')} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\alpha'}$
- ✓ $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z'\,[2\pi]$ et $e^{-i\alpha'} = \frac{1}{e^{i\alpha'}}$
- ✓ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\,[2\pi]$ et $e^{i(\alpha-\alpha')} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}}$

- ***Formule de Moivre***

Soit $n \in \mathbb{Z}$, pour tout α réel on a:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \quad \text{et} \quad \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}, [1;\alpha]^n = [1;n\alpha]$$

- ***Arguments et angles orientés***

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives a, b, c, d, avec $a \neq b$ et $c \neq d$. On a:

✓ $\arg(z_B - z_A) \equiv (\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi] \equiv \arg(b-a)\ [2\pi]$

✓ $\arg\dfrac{d-c}{b-a} \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})\ [2\pi]$

✓ si $\vec{u}$ est un vecteur non nul d'affixe z et un vecteur $\vec{u}'$ non nul d'affixe z' alors

- $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\ [2\pi]$
- $\vec{u} \perp \vec{u}'$ signifie $\dfrac{z'}{z}$ est imaginaire

Remarque

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \perp \vec{u}'$

Si $\vec{u}' = \vec{0}$ alors $\vec{u} \perp \vec{u}'$ et $\dfrac{z'}{z} = 0$

- $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs non nuls et colinéaires signifie $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}^*$

⑥ ***Racines $n^{\text{ièmes}}$ ièmes d'un nombre complexe***

Définition

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine nième du nombre complexe a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Si $a = 0$ alors 0 est l'unique racine nième de 0.

Si $a \neq 0$ on pose $a = [r;\alpha] = re^{i\alpha}$

$$z^n = a \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right] \text{ avec } k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

Cas particulier

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité:

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\left(k\frac{2\pi}{n}\right)} = \left[1; k\frac{2\pi}{n}\right] \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque

Les points images des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$ avec $n \geq 3$.

⑦ Equations dans $\mathbb{C}$

◆ *Racines carrées d'un nombre complexe non nul*

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées dans $\mathbb{C}$.

Méthode Algébrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2| = |a| \\ \Re e(z^2) = \Re e(a) \\ \Im m(z^2) = \Im m(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| \\ x^2 - y^2 = \Re e(a) \\ 2xy = \Im m(a) \end{cases}$$

◆ *Equation du second degré dans $\mathbb{C}$*

Soient a, b, c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soit δ une racine carrée du nombre complexe Δ.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes ou confondues

Ce sont les nombres complexes $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$

Remarque:

Déterminer les nombres complexe z_1 et z_2 tels que:

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ équivaut à résoudre le système:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

⑧ Translation - homothétie

◆ *Forme complexe d'une translation*

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b et M d'affixe z et M' d'affixe z'.

$M' = t_{\vec{u}}(M) \quad \Leftrightarrow \quad z' = z + b$

- ***Forme complexe d'une homothétie***

Soit A un point du plan complexe d'affixe a, $k \in \mathbb{R}^*$, M d'affixe z et M' d'affixe z'. $M' = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow (z'-a) = k(z-a)$

- ***Forme complexe d'une rotation***

Soit ω le point du plan complexe d'affixe z_ω, M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z' et α un réel. Soit $r_{(\omega;\alpha)}$ la rotation de centre ω et d'angle α.

$$r_{(\omega;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow e^{i\alpha}(z - z_\omega) = z' - z_\omega$$

EXERCICES ☺

Exercice 1 ☺

Soit $f(z) = z^3 + 4z^2(-1+i) - 12iz + 8 + 8i = 0$.

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle unique que l'on déterminera.

b) Trouver trois nombres complexes a, b, c telsque $f(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

d) Soit A, B, C les points du plan complexe d'affixes 2, -2i et 2-2i respectivement. Quelle est la nature du triangle ABC.

Correction ☺

a) $z = x$ (avec $x \in \mathbb{R}$) est solution $\Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2(-1+i) - 12ix + 8 + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8 + i(4x^2 - 12x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 8 = 0 \\ 4x^2 - 12x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 8 = 0 \\ x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

D'où $z = 2$ est la seule solution réelle de l'équation $f(z) = 0$

b) Pour tout z de $\mathbb{C}$:

$f(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$

$\Leftrightarrow$ pour tout z de $\mathbb{C}$: $f(z)=az^3(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b-2a=-4+4i\\ c-2b=-12i\\ -2c=8+8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2+4i\\ (-4-4i)-2(-2+4i)=-12i\\ c=-4-4i\end{cases}$$

D'où pour tout z de $\mathcal{P}$ on a: $f(z)=(z-2)(z^2-2(1-2i)z-4(1+i))$

c) $f(z)=0\Leftrightarrow z=2$ on $z^2-2(1-2i)z-4(1+i)=0$

Résolvons l'équation $z^2-2(1-2i)z-4(1+i)=0$

$\Delta'=(1-2i)^2+4(1+i)=1-4-4i+4+4i=1$

D'où $z'=1-2i-1=-2i$; $z''=1-2i+1=2-2i$ et par suite

$f(z)=0\Leftrightarrow z=2$ ou $z=-2i$ ou $z=2-2i$

d) A (2); B(-2i); C(2-2i)

on a: $AC=|z_C-z_A|=|-2i|=2$ et $BC=|z_C-z_B|=|2|=2$

et $AB=|z_B-z_A|=|-2i-2|=2\sqrt{2}$

donc $\begin{cases}AB^2=AC^2+CB^2\\ AC=BC\end{cases}$

EXERICE 2 ☺

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i=0$.

Sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure que l'on notera z_A.

On notera z_B et z_C les deux autres racines.

2°) Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$.

On notre A, B, C les points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

a) Montrer que les points A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}(O,1)$.

b) Calculer le module de z_A-z_B. Quelle est la nature du triangle OAB?

c) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

Correction ☺

1) $z_A = iy$ (avec $y \in \mathbb{R}$) est une solution

$$\Leftrightarrow -iy^3 + (\sqrt{3} - i)(-y^2) + (1 - i\sqrt{3})(iy) - i = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}y^2 + y\sqrt{3} + i(-y^3 + y^2 + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}y^2 + y\sqrt{3} = 0 \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 1 \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

D'où $z_A = i$ est la seule solution imaginaire pure de l'équation.

Cherchons les autres racines z_B et z_C de l'équation.

* On pose $f(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

Montrons qu'il existe (a, b, c) de $\mathbb{C}^3$ tels que:

$\forall z \in \mathbb{C}$: $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$

pour tout z de $\mathbb{C}$ $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow$

pour tout z de $\mathbb{C}$ $f(z) = az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = \sqrt{3} - i \\ c - ib = 1 - i\sqrt{3} \\ -ic = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \\ 1 - i(\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où pour tout z de $\mathbb{C}$ on a, $f(z) = (z - i)(z^2 + z\sqrt{3} + 1)$

Remarque:

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on a:

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = z^3 + \sqrt{3}z^2 + z - i(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$$

$$= (z^2 + \sqrt{3}z + 1)z - i(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = (z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z - i).$$

* Résolvons l'équation $z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$

On a: $\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$.

Donc $z' = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$; $z'' = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

On prend par exemple $z_B = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_C = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$

3) a) On a: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ d'où $OA = OB = OC = 1$

Donc A, B et C sont sur le cercle $\mathscr{C}(O,1)$.

b) $|z_A - z_B| = \left|i - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$

On a: $OA = OB = AB = 1$ donc OAB est un triangle équilatéral.

c) $BC = |z_B - z_C| = |i| = 1$

Donc $OA = AB = BC = OC$ par suite OABC est un losange.