# PRIMITIVES

## I/ Définition :

Activité1 :

Soit f et F deux fonctions définies sur IR par : $f(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ et $F(x)=x^4+x^3-2x^2+x+3$

1) Vérifier que F est dérivable sur IR et que $F'(x)=f(x)$ $\forall$ $x\in IR$

2) Donner deux autres fonctions G et H tels que $\forall$ $x\in IR$ on a : $G'(x)=H'(x)=f(x)$
   et les écrire en fonction de F.

• Les fonctions F , G et H s'appellent des primitives de f sur IR

Définition :

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est dite une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall$ $x\in I$ on a : $F'(x)=f(x)$

Théorème :

Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I alors elle admet une infinité de fonctions primitives sur I qui sont toutes de la forme F+c ; où c est une constante réelle arbitraire.

Exercice : (Primitives de quelques fonctions usuelles)

On désigne par F une primitive de f sur un intervalle I.

| f | I | F |
|---|---|---|
| $x\longmapsto a$ ; $a\in IR$ | IR | $x\longmapsto ax+c$ |
| $x\longmapsto x$ | IR | $x\longmapsto \frac{1}{2}x^2+c$ |
| $x\longmapsto x^n$ ; $n\in IN^*$ | IR | $x\longmapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ |
| $x\longmapsto \frac{1}{x^2}$ | $IR^*$ | $x\longmapsto -\frac{1}{x}+c$ |
| $x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $IR_+^*$ | $x\longmapsto 2\sqrt{x}+c$ |
| $x\longmapsto \cos x$ | IR | $x\longmapsto \sin x+c$ |
| $x\longmapsto \sin x$ | IR | $x\longmapsto -\cos x+c$ |
| $x\longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^1 x$ | $IR\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $x\longmapsto \tan x+c$ |
| $x\longmapsto \cos(ax+b)$ | IR | $x\longmapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $x\longmapsto \sin(ax+b)$ | IR | $x\longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |

## II/ Cas d'une fonction continue ;

Activité : Soit la fonction $f : x\longmapsto \pi.\sin(\frac{\pi x}{3})$

1) Vérifier que f est continue sur IR.

2) Donner l'ensemble des primitives de f sur IR.

3) Déterminer la primitive F de f sur I qui s'annule en 3.

Théorème1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I de IR admet des primitives sur I.

Théorème2 :

Soit I un intervalle de IR , a∈I et b∈IR.

Toute fonction f continue sur I admet une unique primitive F sur I telle que F(a)=b.

## III/ Opérations sur les fonctions primitives :

Activité :

Soit les fonctions f et g définies sur IR par f(x)=x.sinx et g(x)=x.cosx

1) Calculer f ‘(x) et g’(x) ;  x∈IR.

2) Soit la fonction h définie sur IR par : h(x)=(3x+2)cosx+(3-2x)sinx

   a) Vérifier que h(x)=3.f ‘(x)+2.g’(x)

   b) En déduire une primitive H de la fonction h sur IR.

Théorème :

Etant données deux fonctions f et g définies sur un intervalle I de IR et deux réels $\alpha$ et $\beta$.

Si F et G sont respectivement deux primitives de f et g sur I alors :

($\alpha$.F+$\beta$.G) est une primitive de ($\alpha$.f+$\beta$.g)

Exercice :

Déterminer une primitive F de f dans chacun des cas suivants:

a) f : $\longmapsto$ 3.cos(2x)+2.tan$^2$x  ;  I=]-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$[

b) f : x $\longmapsto x^3-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}$  ;  I= ]0,+∞[.

## IV/ Règles de primitivation:

On désigne par F une primitive de la fonction f sur un intervalle I de IR. u et v sont deux fonctions dérivables sur I.

| f | Condition | F |
|---|---|---|
| a.u’  ;  a∈IR | ……………………………………… | a.u+c |
| u’.v+u.v’ | ……………………………………… | u.v+c |
| $u'.u^n$ ; n∈ IN* | ……………………………………… | $\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ |
| $\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$ | v(x)≠0  ∀ x∈ I | $\frac{u}{v}+c$ |
| $\frac{u'}{u^n}$ ; n ∈ IN* \ {1} | u(x)≠0  ∀ x∈ I | $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | u(x)>0  ∀ x∈ I | $2\sqrt{u}+c$ |
| u’.(v’ou) | v est dérivable sur u(I) | (vou)+c |

Exercice : Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de f sur I :

1) f : x $\longmapsto (3x^2-1)(x^3-x)^4$  ;  I=IR

2) f : x $\longmapsto \frac{6x-1}{(3x^2-x+1)^4}$  ;  I=IR

3) f : x $\longmapsto$ x+tanx+x.tan$^2$x  ;  I=]-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$[

4) f : x $\longmapsto \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$  ;  I=IR

5) f : x $\longmapsto \frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}$  ;  I=IR*

6) f : x $\longmapsto \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$  ;  I=IR*