

Définition : "Repère et base de l'espace"

Soit O un point, \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs de l'espace.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace, lorsque \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} ne sont pas coplanaires.

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

– Pour tout point M , il existe trois réels x , y et z tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x , y et z sont **les coordonnées de M** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

x est l'**abscisse**, y est l'**ordonnée** et z est le **cote** du point M . On note : $M(x, y, z)$.

– Tout vecteur \vec{u} peut s'écrire : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ où a , b et c sont des réels.

a , b et c sont **les coordonnées de \vec{u}** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

– $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

– Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

– Si le repère est orthonormé, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Définition : "Vecteurs colinéaires"

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont **colinéaires** s'il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ de l'espace sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$.

Théorème :

Soient A, B et C trois points de l'espace.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Définition : "Vecteurs coplanaires"

Trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont **coplanaires** s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$.

Théorème :

Trois vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ de l'espace sont coplanaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$.

Avec : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$

Théorème :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} sont coplanaires.

Théorème :

Soit \vec{u} un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'ensemble des point M de l'espace tels que les vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AM} sont colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} . On la note $D(A, \vec{u})$.

Théorème : "Représentation paramétrique d'une droite"

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$, α est un paramètre réel.

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$.

Positions relatives de deux droites :

Deux droites de l'espace sont :

- Coplanaires (contenues dans le même plan). Dans ce cas, elles sont soit sécantes soit parallèles (strictement ou confondues).
- Non-coplanaires (ne sont pas contenues dans le même plan). Dans ce cas, elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Théorème :

Soient D et D' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} .
 $D // D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires.

Théorème :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.
 L'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires est le plan passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .
 Ce plan est noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème : "Représentation paramétrique d'un plan"

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.
 $M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$, α et β sont des paramètres réels.
 Ce système est appelé **une représentation paramétrique du plan** $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème :

- Tout plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme :
 $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont réelles telles que $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.
- Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont réelles tels que $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ est celle d'un plan de l'espace.
- Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan et soit $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.
 \vec{u} est un vecteur du plan $P \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Positions relatives de deux plans :

Deux plans de l'espace sont parallèles (strictement ou confondues) ou sécants (l'intersection est une droite).

Théorème :

- Deux plans sont parallèles ssi tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.
- Soient $P: ax + by + cz + d = 0$ et $P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans où a' , b' et c' sont non nuls. On a : $P // P' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.
- Deux plans sont sécants ssi il existe au moins un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.

Positions relatives d'un plan et d'une droite :

Un plan et une droite sont parallèles (strictement ou la droite est incluse dans le plan) ou sécants.

Théorème :

- Un plan P et une droite D sont parallèles si et seulement s'il existe un vecteur directeur de D qui est un vecteur de P .
- Un plan P et une droite D sont sécants si et seulement s'il existe un vecteur de D qui n'est pas un vecteur de P .