Premières opérations sur les nombres complexes

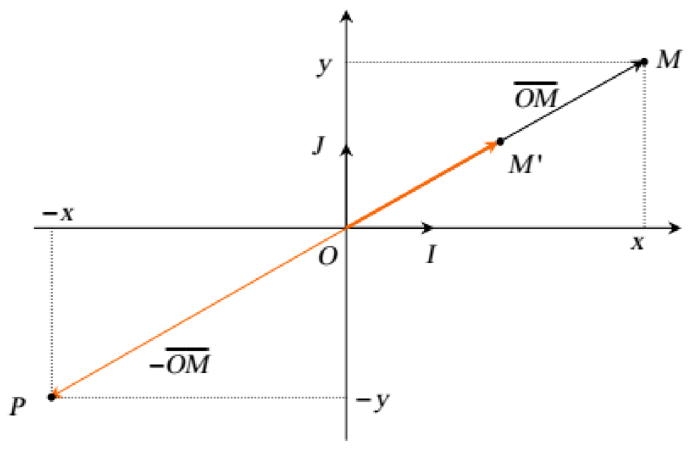
Multiplication d'un complexe par un réel

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et a un réel. On a :

$$\boxed{az = a(x+iy) = ax + iay}$$

En d'autres termes : $\Re e(az) = a\Re e(z)$ et $\Im m(az) = a\Im m(z)$.
Sur la figure ci-dessous nous avons positionné un point M' d'affixe az avec $0 < a < 1$.

→ Cas particulier : pour $a = -1$, on obtient l'opposé du nombre complexe z : $-z = -x - iy$.
Sur la figure ci-dessous, nous avons positionné le point P d'affixe $-z$. Il s'agit du symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine.



Somme et différence

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \,/\, z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on note respectivement $z + z'$ et $z - z'$ la somme et la différence des nombres complexes z et z' et on a :

$$\boxed{\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ z - z' &= (x - x') + i(y - y') \end{aligned}}$$

En d'autres termes :

- $\Re e(z + z') = \Re e(z) + \Re e(z')$ et $\Im m(z + z') = \Im m(z) + \Im m(z')$.
- $\Re e(z - z') = \Re e(z) - \Re e(z')$ et $\Im m(z - z') = \Im m(z) - \Im m(z')$.

L'ensemble des nombres complexes

Définitions

On pose i tel que $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble : $\left\{z=x+iy/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Le réel x est appelé « <u>partie réelle du nombre complexe z</u> » et est notée : $\Re e(z)$.
Le réel y est appelé « <u>partie imaginaire du nombre complexe z</u> » et est notée : $\Im m(z)$.
L'écriture $z=x+iy$ est appelée « <u>forme algébrique du nombre complexe z</u> ».
Si $\Re e(z)=0$ le nombre complexe z est appelé « <u>imaginaire pur</u> ».

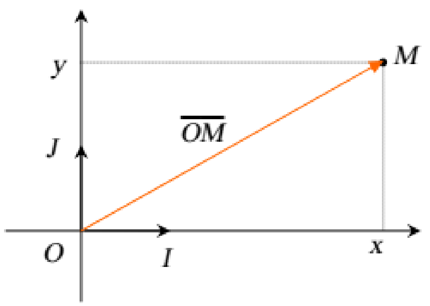
Premières propriétés

- $z=x+iy=0 \Leftrightarrow x=y=0$;
- Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2 / z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$
  On a : $z=z' \Leftrightarrow \Re e(z)=\Re e(z')$ et $\Im m(z)=\Im m(z') \Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$;
- $z=x+iy\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Im m(z)=0 \Leftrightarrow y=0$

Représentation géométrique et plan complexe

On rapporte le plan orienté à un repère orthonormal direct $\left(O,\overline{OI},\overline{OJ}\right)$.
A tout complexe $z=x+iy$ on associe le point M (que l'on peut également noter $M(z)$ ou $M(x+iy)$) de coordonnées (x,y) : $\overline{OM}=x\overline{OI}+y\overline{OJ}$.
On dit alors que l'on travaille dans « <u>le plan complexe</u> ».

$M(z)$ est appelé « <u>image du complexe z</u> » et le complexe z est appelé « <u>affixe du point M</u> ».

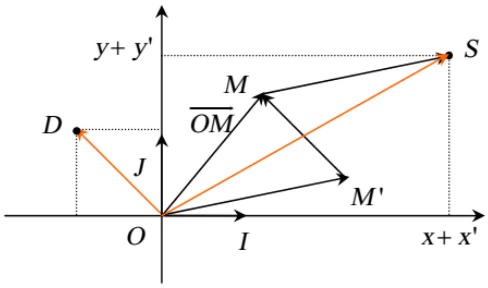


→ L'axe des abscisses correspond à l'ensemble des réels.

→ L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des imaginaires purs.

<u>**Note**</u> : « affixe » est un nom féminin.

→ Représentation géométrique.
On désigne par M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.



Le point S d'affixe $z+z'$ est défini par :

$$\overline{OS} = \overline{OM} + \overline{OM'}.$$

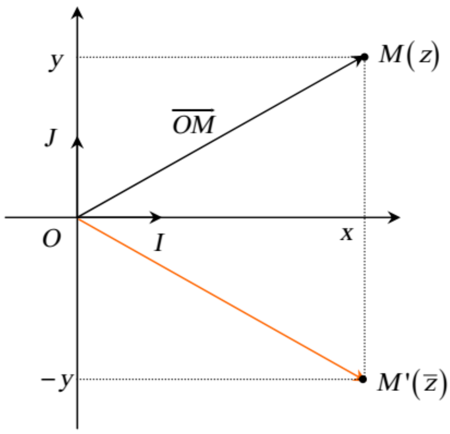
Le point D d'affixe $z-z'$ est défini par :

$$\overline{OD} = \overline{OM} - \overline{OM'} = \overline{M'M}.$$

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
On appelle « <u>conjugué de z</u> », noté $\overline{z}$, le complexe : $x - iy$.



Géométriquement, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, du point M d'affixe z.

Premières propriétés

- $\overline{\overline{z}} = z$. On dit que « les complexes z et $\overline{z}$ sont conjugués ».
- $z + \overline{z} = 2\Re e(z)$ est un réel et $z - \overline{z} = 2i\Im m(z)$ est un imaginaire pur.
- z est un réel $\Leftrightarrow \Im m(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
- Soit $z = x + iy$. On a : $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$.

Autres opérations sur les nombres complexes

Produit

$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2 \,/\, z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, on note zz' le produit des nombres complexes z et z' et on a :

$$\boxed{zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)}$$

Rapport

$\forall(z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^* \,/\, z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, on note $\frac{z}{z'}$ le rapport des nombres complexes z et z' et on a :

$$\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z}'}{z'\overline{z}'}=\frac{(x+iy)(x'-iy')}{x'^2+y'^2}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+i\frac{-xy'+x'y}{x'^2+y'^2}}$$

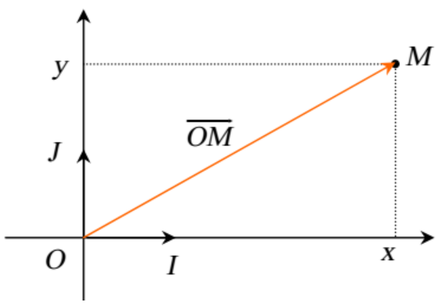
Autres propriétés de la conjugaison

- Conjugué d'une somme : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2, \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z}'$.
- Conjugué d'un produit : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2, \overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z}'$.
- Conjugué d'un rapport : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}'}$.

Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe.
On appelle « <u>module de z</u> », noté $|z|$, le réel positif : $\sqrt{x^2+y^2}$.



→ Interprétation géométrique

Si M est le point d'affixe z, $|z|$ est la distance du point O au point M et c'est donc aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$|z|=d(O,M)=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$$

Propriétés

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z\overline{z} = |z|^2$;
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z||z'|$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Inégalité triangulaire

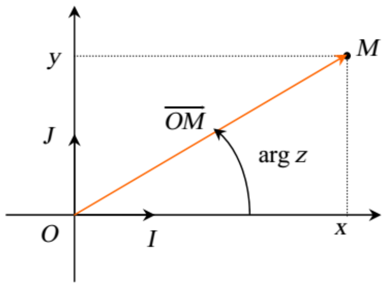
$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

On a l'égalité si, et seulement si, il existe un réel a tel que $z' = az$ ou $z = az'$ (c'est à dire si et seulement si les points O, $M(z)$ et $M'(z')$ sont alignés).

Formes trigonométriques d'un nombre complexe

Arguments d'un nombre complexe non nul

On considère un nombre complexe z non nul et le plan complexe. Soit M le point d'affixe z.
On appelle alors « argument de z », noté $\arg z$, toute mesure de l'angle $\left(\overline{OI}, \overline{OM}\right)$.



- L'argument d'un nombre complexe est donc défini modulo 2π : si θ est une mesure donnée de l'angle $\left(\overline{OI}, \overline{OM}\right)$ alors les autres mesures de cette angle sont de la forme $\theta + 2k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}^*\right)$.
- Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.

Premières propriétés de l'argument

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg \overline{z} = -\arg z$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \pi + \arg z$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exponentielle complexe (Euler)

Pour tout réel θ, on appelle « exponentielle complexe », notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe :

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

Remarque : dans cette écriture introduite par Euler, et comme le nom l'indique, e désigne la base du logarithme népérien.

→ Euler a également fournit la très belle formule suivante, cas particulier de la précédente ($\theta = \pi$) :

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Formules d'Euler

A partir de $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ on tire les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul dont une forme trigonométrique est :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$$

Alors on a :

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}$$

Cette écriture est appelée « forme exponentielle » du nombre complexe z.

Remarque : un nombre complexe admettant une infinité d'arguments, il admet une infinité de formes complexes.

Propriétés de la forme exponentielle

- Soit z un nombre complexe non nul et $re^{i\theta}$ une forme exponentielle de z. Alors $re^{-i\theta}$ est une forme exponentielle de $\overline{z}$.
- Soient z et z' deux complexes non nuls de formes exponentielles $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ respectivement. On a alors :

$$\boxed{zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \text{ et } \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.
On peut alors mettre z sous la forme :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{où } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Une telle écriture est appelée « forme trigonométrique » de z.

Remarques :

- un nombre complexe admettant une infinité d'arguments, il admet une infinité d'écritures trigonométriques.
- On a : $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|}$.
- Si $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe non nul z alors on peut écrire : $z = (-r)(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Dans ce cas on a $r' < 0$ et l'écriture $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ n'est pas une forme trigonométrique du nombre complexe z.

Autres propriétés de l'argument

- $\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg(zz') = \arg z + \arg z'$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$;
- $\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n\arg z$;
- Soit $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \pi + \arg z$.

Formule de Moivre

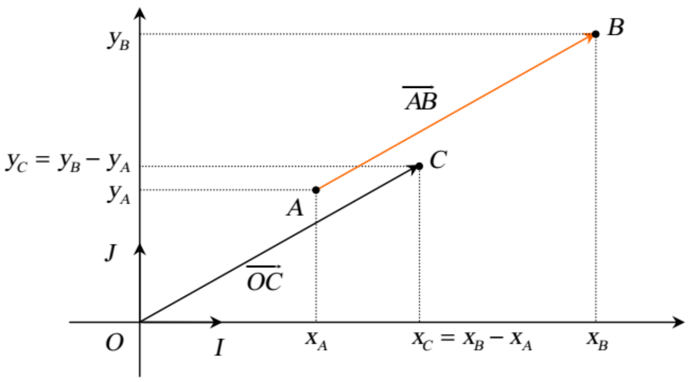
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Nombres complexes et géométrie

Affixe et norme d'un vecteur

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet :

- comme affixe : $z_B - z_A$.
  (c'est celle du point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$)
- comme norme : $|z_B - z_A|$.
  (c'est la longueur du segment $[AB]$)



Angle de deux vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}$$

Applications

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si :
  - $A = B$;
  - ou $C = D$;
  - ou : $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel.

- Deux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont orthogonaux si, et seulement si :
  - $A = B$;
  - ou $C = D$;
  - ou : $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

Le cercle

Cercle de centre et de rayon donnés

On considère, dans le plan complexe, le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r > 0$.

Le point M d'affixe z appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, il existe un réel θ tel que :

$$z = \omega + re^{i\theta}$$

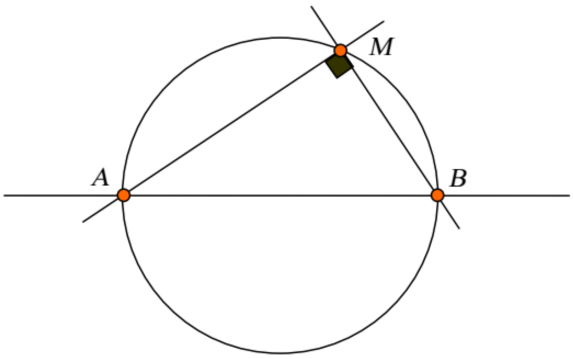
Remarque : cette expression est « simplement » celle d'un complexe z vérifiant : $|z - \omega| = r$.

Cercle dont on connaît un diamètre

On considère, dans le plan complexe, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, A et B étant deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

Le point M, différent de A et B, d'affixe z appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si le complexe $\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ est un imaginaire pur.

Remarque : cette caractérisation traduit simplement le fait que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.



L'équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Soit a un nombre réel.
Il admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées :

- si a est positif, ses racines carrées complexes sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ (elles sont confondues pour $a=0$).
- si a est strictement négatif, ses racines carrées complexes sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Par exemple, les racines carrées complexes de -169 sont $13i$ et $-13i$; celles de 25 sont -5 et 5.

Equation du second degré

On cherche les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$az^2+bz+c=0 \qquad (\mathrm{E})$$

où a, b et c sont trois réels, a étant non nul.

On introduit le discriminant : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ et on a la discussion suivante :

- Si $\boxed{\Delta>0}$, l'équation (E) admet deux racines réelles :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\boxed{\Delta=0}$, l'équation (E) admet une racine réelle double :

$$z_0=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\boxed{\Delta<0}$, l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$