LIMITES ET CONTINUITE

4 éme Technique

I/ ACTIVITES PRELIMINAIRES :

Activité 1 :

Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-2}{|x+1|}$; $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2x+1}{3x^2-2x-1}$; $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$;

$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{6-2x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x+4}{-x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+x-1}}{x+1}$

Activité 2 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1}-2 & \text{si } x<0 \\ f(x) = 3x^2+x-1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{5x+1}{x^2+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Calculer f(0) et f(1) puis étudier la continuité de f en 0 et en 1.

2) f est elle continue sur $[1,+\infty[$? sur $[0,1]$? sur $]-\infty,0]$? sur IR ?

Définitions :

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel x_0. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point x_0 de I.

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de type [a,b]. On dit que f est continue sur I si $\begin{cases} \text{f est continue sur }]a,b[\\ \text{f est continue à droite en a} \\ \text{f est continue à gauche en b} \end{cases}$

4) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de type [a,b[(b est fini ou infini). On dit que f est continue sur I si $\begin{cases} \text{f est continue sur }]a,b[\\ \text{f est continue à droite en a} \end{cases}$

5) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de type]b,a] (b est fini ou infini). On dit que f est continue sur I si $\begin{cases} \text{f est continue sur }]a,b[\\ \text{f est continue à gauche en b} \end{cases}$

Activité 3 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-3)^2}{|x-3|} \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur IR

Opérations sur les fonctions continues :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

1) Les fonctions f+g ; f×g ; λ.f (où λ ∈IR) et f^n (où n∈IN) sont continue sur I.

2) Si de plus g(x)≠0 ∀ x∈ I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

3) Si f est positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Par conséquent :

- Toute fonction polynôme est continue sur IR
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine.

II LIMITE ET CONTINUITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE :

1) **Composée de deux fonctions :**

Définition :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles I et J tels que pour tout x∈I, on a f(x)∈J. La fonction notée gof : I⟶IR s'appelle la composée de f par g

x⟼ g(f(x))

On écrit alors : gof(x)=g(f(x)) et on lit <g rond f de x>

Exercice :

Soit f :$x \longmapsto \frac{x+3}{x-2}$ et g :$x \longmapsto \sqrt{x}$

1) Calculer gof(6) ; fog(6) et fog(9).
2) fog(4) existe-t-il ?
3) a) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes : fog et gof.
   b) Donner l'expression de gof(x) et fog(x)

Remarques :

- $fog(x) \neq gof(x)$ sauf dans certains cas.
- $D_{gof} = \{x \in D_f \,;\, f(x) \in D_g\}$

2) Limite :

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que pour tout x∈I, on a f(x)∈J.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to L} g(x) = L'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = L'$ (L et L' pourrons être finis ou infinis)

■ Ce théorème reste encore valable si $x \longrightarrow {x_0}^+,\ {x_0}^-,\ +\infty$ ou $-\infty$

Exercice :

a) Soit les fonctions f : $x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ et g : $x \longmapsto 3x+3$

Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} gof(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} fog(x)$

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(\pi-2x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x}$

⇨ Rappels :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

■ **Exercice à la maison : N 8 p31**

Un cas particulier :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que pour tout x∈I, on a f(x)∈J. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (l∈IR) et si g est continue en l, alors $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = g(l)$.

(ce résultat reste encore valable si $x \longrightarrow {x_0}^+,\ {x_0}^-,\ +\infty$ ou $-\infty$)

Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi x+1}{4x-3}\right) = \cos(\frac{\pi}{4})$

Activité :

Soit la fonction f : $x \longmapsto x.\sin\frac{1}{x}$

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Théorème :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, on a :

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe ⟺ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$ existe. Dans ce cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty, a[$, on a :

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existe ⟺ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x})$ existe. Dans ce cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x})$

Exercice :

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\cos\frac{1}{x} - 1)$

3) Continuité :

Activité :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que pour tout x∈I, on a f(x)∈J. Soit x_0 un réel de I. Montrer que si f est continue en x_0 et g est continue en f(x_0), alors gof est continue en x_0

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que pour tout x∈I, on a f(x)∈J. Soit x_0 un réel de I.

Si f est continue en x_0 et si g est continue en f(x_0) alors la fonction composée gof est continue en x_0.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)+1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

et g la fonction définie par g(x)= $\sqrt{2x-1}$

Montrer que gof est continue en 0

III/ PROLONGEMENT PAR CONTINUITE :

Activité :

Soit f : $x \longmapsto \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$; x∈ $[-3,+\infty[\setminus\{1\}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

2) Soit F la fonction définie par : $\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \in [-3,+\infty[\setminus\{1\} \\ F(1) = 8 \end{cases}$

Vérifier que F est continue en 1.

•F s'appelle le prolongement par continuité de f en 1.

Retenons :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel x_0 de I.

Si f admet une limite finie L en x_0 alors la fonction F définie sur I par :

$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ F(x_0) = L \end{cases}$ est continue en x_0

(F s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0)

IV/ LIMITE ET ORDRE :

1) Signe de la limite :

Activité :

Soit f : $x \longmapsto x^2 - 3x - 4$

1) Etudier le signe de f(x).

2) Sans calculer , donner le signe de chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to5} f(x)$

Retenons :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert, sauf peut être en un réel x_0 de I. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=L∈IR.

- Si f(x)≥0 ∀ x∈ I\\{x_0 } alors L≥0
- Si f(x)≤0 ∀ x∈ I\\{x_0 } alors L≤0

Activité :

f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ouvert, sauf peut être en un réel x_0 de I.

On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=L et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=L'

Montrer que si f(x)≤g(x) ∀ x∈ I\\{x_0 } alors L≤L' (Indication : on pourra poser la fonction h =f−g)

Retenons :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ouvert, sauf peut être en un réel x_0 de I.

On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=L et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=L'

Si f(x)≤g(x) ∀ x∈ I\\{x_0 } alors L≤L'

• Les deux résultats précédents restent encore valables si $x \to {x_0}^+$; ${x_0}^-$; $+\infty$ ou $-\infty$

2) Théorèmes des gendarmes :

Activité1 :

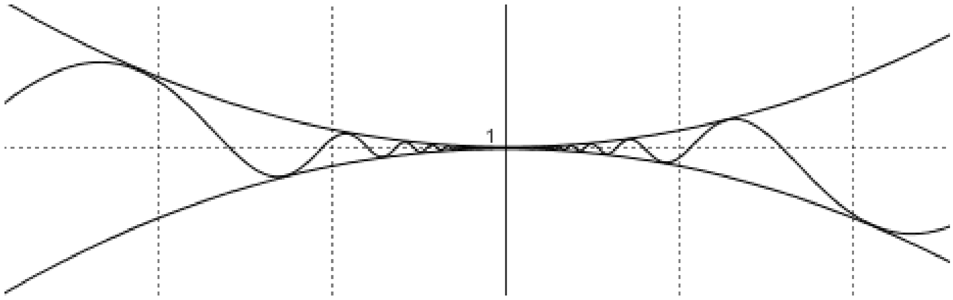
Dans le graphique ci-dessous on a tracé trois courbes correspondants aux trois fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ $\qquad$ $g : x \longmapsto x^2 + 1$ $\qquad$ $h : x \longmapsto -x^2 + 1$

1) Préciser la fonction correspondant à chacune de ces trois courbes

2) Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \neq 0$

3) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$. Que peut on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?



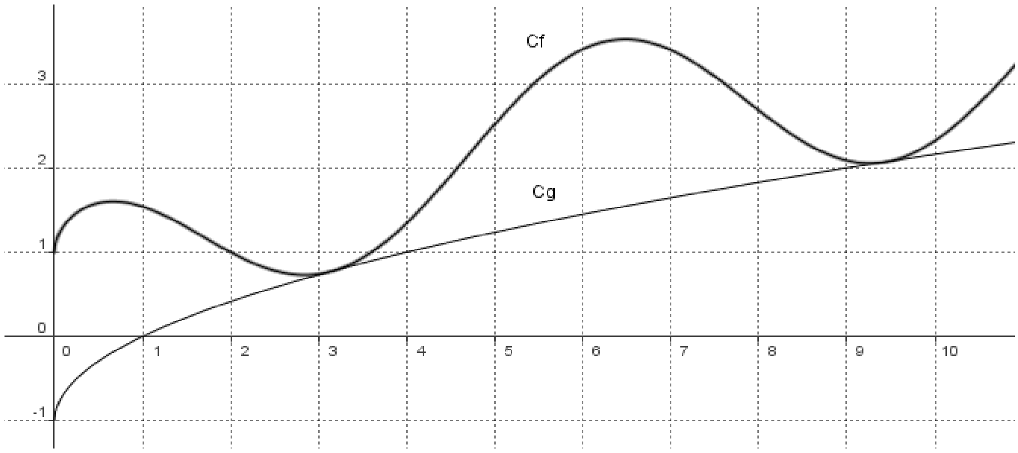
Activité2 :

Dans le graphique ci-contre on a représenté deux fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x} + \cos x$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x} - 1$

1) Montrer que $f(x) \geq g(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3) Que peut on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?



Retenons :

Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut etre en un réel x_0 de I.
Soit L un réel.

1) Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

2) Si $f(x) \geq u(x)$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

3) Si $f(x) \leq u(x)$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

• Ces résultats restent encore valables si $x \longrightarrow {x_0}^+$; ${x_0}^-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice1 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x+2}$

Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{-1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice2 :

Soit la fonction $f\ x \longmapsto \dfrac{x - 2\sin x}{x}$

1) Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq \frac{x-2}{x}$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Conséquence :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I Sauf peut être en un réel x_0 de I. Soit $L \in IR$.
Si $|f(x) - L| \leq |g(x)|$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

$\Longrightarrow$ Ce résultat reste encore valable si $x \longrightarrow {x_0}^+$; ${x_0}^-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice :

Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x} . \sin x + 2$; $x \neq 0$

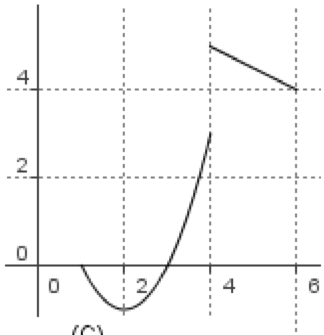
1) Montrer que pour tout $x \neq 0$ on a : $|f(x) - 2| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

V/ IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE :

1) Théorème des valeurs intermédiaires :

Activité :

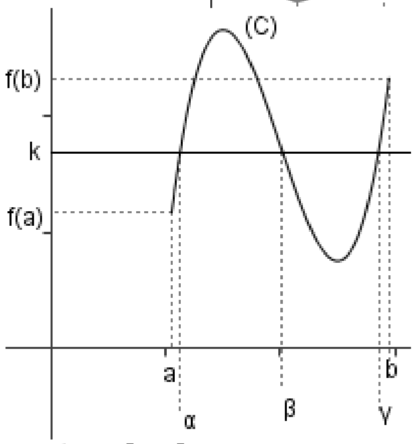


Dans le graphique ci-contre on a représenté une fonction f définie sur l'intervalle[1,6].

1) A l'aide du graphique déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes : f(x)=0 ; f(x)=2 ; f(x)=3,5 et f(x)=7

2) A l'aide du graphique, discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation f(x)=m

Théorème :



Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a<b. Alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x)=k admet au moins une solution α dans [a, b].

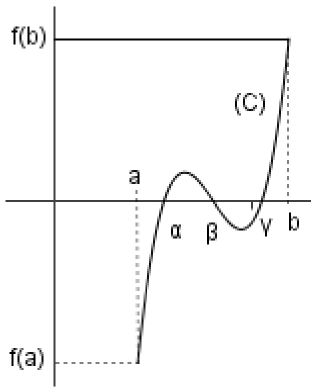
Exercice :

Soit la fonction $f : x \longmapsto 2x^3 - 4x^2 + x - 1$

1) Montrer que l'équation f(x)=2 admet au moins une solution α dans [2,3].

2) Vérifier que $f(1) \times f(2) < 0$. En déduire que l'équation f(x)=0 admet au moins une solution β dans [1,2]

Corollaire 1 :



Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] telle que : $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution α dans]a,b[.

Remarque :

Ce corollaire indique que lorsque f change de signe sur [a,b], sa courbe coupe l'axe des abscisses au moins une fois en un point d'abscisse appartenant à cet intervalle.

Remarque:

Dans TVI, si de plus la fonction f est strictement monotone sur [a,b], alors la solution α est unique dans[a,b].

Activité :

1) Montrer que l'équation $x^3 + 10x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [0,1].

2) Donner une valeur approchée de α à 0,1 prés. (Suivre un procédé appelé dichotomie)

Activité :

Soit f une fonction continue et non nulle sur un intervalle I. Montrer que f garde un signe constant sur I. (On peut découvrir ce résultat graphiquement)

Corollaire 2 :

Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

Exercice :

1) Montrer que pour tout $x\neq1$, on a : $1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{x^5-1}{x-1}$

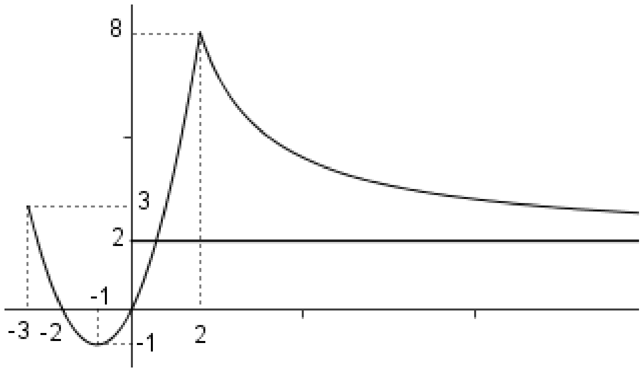
2) En déduire que la fonction $f : x \longmapsto 1+x+x^2+x^3+x^4$ garde un signe constant sur IR, qu'on précisera.

2) Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité :

Voici la courbe (C) d'une fonction f définie sur [-3,+∞[.

1) Déterminer le maximum M et le minimum m (éventuels) de f sur chacun des intervalles suivants : [-3,+∞[; [-3,0] ; [0,2] ; [0,2[; [-3,-2] ; [2,+∞[; [-2,0] et]-2,0[



■ **Rappels** : Soit f une fonction définie sur un ensemble D et $x_0 \in D$.
Alors : ∗ $f(x_0)$ est le maximum de f sur D si $\forall x\in D$ on a : $f(x)\leq f(x_0)$
∗ $f(x_0)$ est le minimum de f sur D si $\forall x\in D$ on a : $f(x)\geq f(x_0)$

2) Déterminer graphiquement les ensembles suivants : $E=\{f(x); x\in[0,2]\}$ et $F=\{f(x); x\in[-3,-1[\}$.
On note E= f([0,2]) et F= f([-3,-1[)

3) Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants :
]-3,-2] ; [−3,0] et [-2,2] ; [2,+∞[; [0,+∞[et [-3,+∞[.

Définition :

L'image d'un intervalle I par une fonction f noté f(I) est l'ensemble des réels f(x) tels que x∈I.

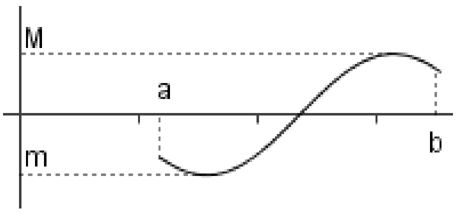
On peut écrire : $f(I)=\{f(x); x\in I\}$

Théorème1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème2 :

L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue f est un intervalle fermé borné [m,M], avec m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a,b].



Remarque :

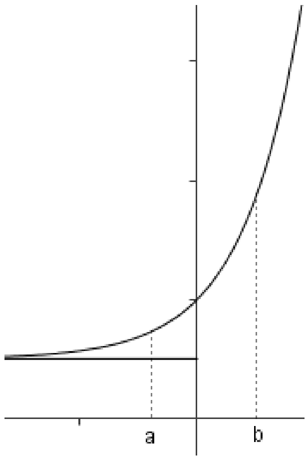
L'intervalle [m,M] n'est pas forcement [f(a),f(b)] ou [f(b),f(a)]

Cas d'une fonction continue et monotone :

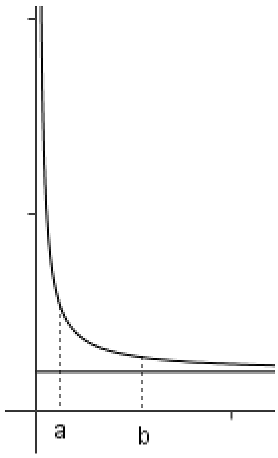
Activité :

Dans chacun des cas suivants déterminer :

f([a,b]) ; f([a,+∞[) et f(D) ; où D est le domaine de définition de f



(1)



(2)

Théorème 3 :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

⇨ **Autrement dit :**

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
I=[a,b]	f(I)=[f(a),f(b)]	f(I)=[f(b),f(a)]
I=[a,b[	f(I)=[f(a) , $\lim\limits_{b^-} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{b^-} f$, f(a)]
I=]a,b]	f(I)=] $\lim\limits_{a^+} f$, f(b)]	f(I)=[f(b), $\lim\limits_{a^+} f$ [
I=]a,b[	f(I)=] $\lim\limits_{a^+} f$, $\lim\limits_{b^-} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{b^-} f$, $\lim\limits_{a^+} f$ [
I=[a,+∞[	f(I)=[f(a) , $\lim\limits_{+\infty} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{+\infty} f$, f(a)]
I=]a,+∞[	f(I)=] $\lim\limits_{a^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{a^+} f$ [
I=]-∞,a]	f(I)=] $\lim\limits_{-\infty} f$, f(a)]	f(I)=[f(a) , $\lim\limits_{-\infty} f$ [
I=]-∞,a[	f(I)=] $\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{a^-} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{a^-} f$, $\lim\limits_{-\infty} f$ [
I=]-∞,+∞[	f(I)=] $\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$ [	f(I)=] $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{-\infty} f$ [

Exercice:

Déterminer l'image par f de l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x-x^2$; I=]-∞,0]

b) f(x)=sinx ; $I=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

c) $f(x)=\frac{2}{x+1}$; I=]-1,+∞[

Exercices à la maison :

N16 page 31+ N14page 31

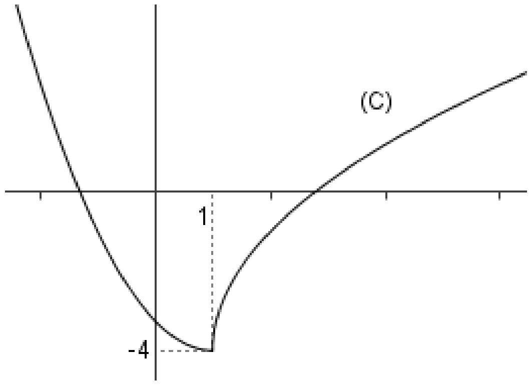
VI/ LIMITES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE :

■ Soit M(x,y) un point de la courbe (C) d'une fonction f. Si x ou y tend vers ∞, alors on dit que (C) admet une branche infinie.

Activité1 :

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.
Ayant au voisinage de -∞ une BIP∥ $(O,\vec{j})$ et au voisinage de +∞ une BIP ∥$(O,\vec{i})$.

Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$



Retenons : (Branches paraboliques)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type [a,+∞[et (C) sa courbe selon un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$, alors (C) admet au voisinage de (+∞) une branche infinie parabolique de direction celle $(O,\vec{j})$. (Un résultat analogue si x⟶ -∞)

2) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$, alors (C) admet au voisinage de (+∞) une branche infinie parabolique de direction celle $(O,\vec{i})$. (Un résultat analogue si x⟶ -∞)

Activité2 :

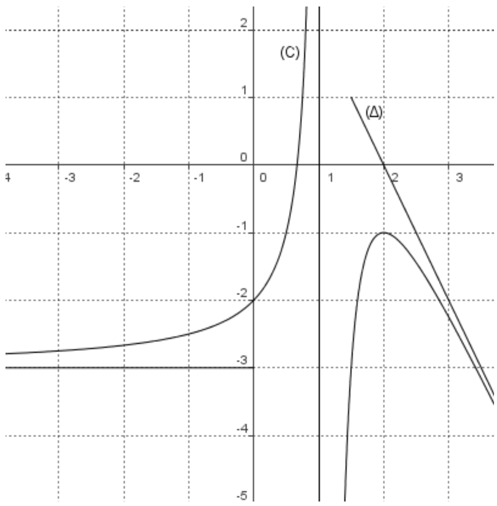
Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f.
La droite (Δ) : $y=-2x+4$ est une asymptote à (C) au voisinage de +∞. Les droites d'équations $x=1$ et $y=-3$ sont des asymptotes à (C).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+2x-4]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x-4]$



Retenons : (asymptotes)

Soit f une fonction et (C) sa courbe selon un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) On dit que D : x=a est une asymptote à (C) si on a : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$

2) On dit que D : y=b est une asymptote à (C) au voisinage de +∞ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

(un résultat analogue au voisinage de -∞).

3) Soit a et b deux réels donnés. On dit que D : y=ax+b est une asymptote oblique à (C) au V(+∞) si on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)]=0$. (Un résultat analogue au V(-∞)).

Activité 3 :

Soit les fonctions $f : x \longmapsto 2x^3-3x^2+x-1$; $g : x \longmapsto \frac{2x^2-x+1}{x^2-1}$ et $h : x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x-2}$

(C) ; (C') et (C'') leurs courbes respectives selon un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les branches infinies de chacune des deux courbes(C) et (C').

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ∀ x≠2

b) En déduire les équations des asymptotes à la courbe (C'').

Activité 4 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x^3+x^2+1}{x^2+2}$ et (C) sa courbe selon un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$

2) En déduire une équation de l'asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Retenons :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[c,+\infty[$ et (C) sa courbe selon un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in IR^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]=b\in IR$. Alors la droite D :y=ax+b est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

(Un résultat analogue si $x \longrightarrow -\infty$)

Exercice:

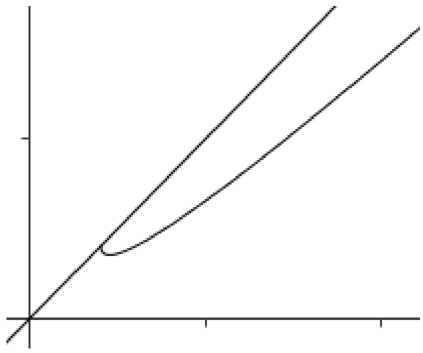
Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et (C) sa courbe selon un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Montrer que la courbe (C) admet au $V(+\infty)$ une asymptote oblique D dont on précisera une équation.

Remarque :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in IR^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]=\infty$, alors (C) admet au $V(+\infty)$ une BIP de direction celle de la droite D : y=ax.

(Un résultat analogue si $x \longrightarrow -\infty$)



COURS PROPOSÉ

PAR MR SALAH HANNACHI
LYCÉE SAID BOU BAKKER
MOKNINE