Résumé : **Géométrie ans l'espace** II
Niveau : *Bac Sciences Techniques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : *saberbjd2003@yahoo.fr*

Définition : *"Produit scalaire"*

Soit A, B et C trois points de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel définie par :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$ où $\|\overrightarrow{AB}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\alpha\vec{u})\cdot(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Théorème : *"Expression analytique du produit scalaire"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un RON de l'espace ξ.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

En particulier : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Définition : *"Vecteurs normal à un plan"*

Un vecteur normal à un plan P est un vecteur directeur d'une droite D quelconque perpendiculaire à ce plan.

Théorème :

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Théorème :

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $P: ax+by+cz+d=0$ un plan avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur noarmal à P.

Théorème : *"Distance d'un point à un plan"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $P: ax+by+cz+d=0$ un plan, $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur P.

La distance de A à P est le réel positif AH noté $d(A,P)$ et tel que :

$$AH=d(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Théorème :

Soit P et Q deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{m}$, D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

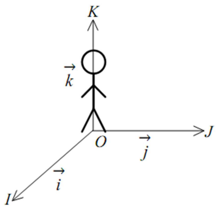
1. $P//Q \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires
2. $P\perp Q \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{m}$
3. $D//D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
4. $D\perp D' \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$
5. $P\perp Q \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
6. $P//D \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$

Définition : *"Orientation de l'espace"*

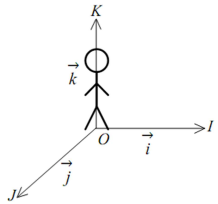
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O,\vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I. Si l'observateur a le point J à sa gauche, le repère est dit direct. Il est dit indirect dans le vas contraire.

Repère direct



Répère indirect

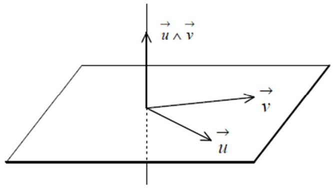


Définition : *"Produit vectoriel"*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vrctoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'unique vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si non, alors :

$$\begin{cases} \vec{u}\wedge\vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ (\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| \end{cases}$$



Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $(\vec{v}+\vec{w})\wedge\vec{u}=\vec{v}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{u}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $(\alpha\vec{u})\wedge(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\wedge\vec{v})$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan P, alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal à P.

Théorème : *"Expression analytique du produit vectoriel"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un ROND de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, on a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

Théorème : *"Cosinus et sinus de l'angle de deux vecteurs"*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. Alors :

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad |\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|=\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Théorème : *"Aire d'un parallélogramme"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un RON de l'espace et $ABCD$ un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

En particulier, l'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

Théorème : *"Distance d'un point à une droite"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $D(B,\vec{u})$ une droite, A un point ede l'espace et H son projeté orthogonal sur $D(B,\vec{u})$.

La distance de A à $D(B,\vec{u})$ est le réel positif AH noté $d(A,D)$ et tel que :

$$AH=d(A,D)=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Définition : *"Produit mixte"*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'epace.

On appelle produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel : $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$

Propriétés :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a"\\b"\\c"\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'epace.

1. $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}a & a' & a"\\ b & b' & b"\\ c & c' & c"\end{vmatrix}$
2. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = 0$

Propriété :

Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base orthonormée.

1. $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = 1$
2. $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est indirecte $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = -1$

Théorème : *"Volume d'un parallélipipde et d'un tétraèdre"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Soit $ABCDA'B'C'D'$ un parallélipipède et V son volume. Alors :

$$V = aire\ de\ la\ base \times huteur = \left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$$

2. Soit $ABCD$ _un tétraèdre, V son volume et h la hauteur issue de A. Alors :

$$V = \frac{1}{3} aire\ de\ la\ base \times hauteur = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$$

$$h = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|}$$

Théorème : *"Distance de deux droites"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\overrightarrow{u'})$ deux droites non coplanaires, H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance de $D(A,\vec{u})$ à $D'(A',\overrightarrow{u'})$ est le réel positif HH' noté $d(D,D')$ et tel que :

$$d(D,D') = HH' = \frac{\left|\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right)\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right\|}$$

Définition : *"Sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif.

On appelle sphère de centre I et de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = R$. On la note : $S(I,R)$.

Conséquence : *"Equation cartésienne d'une sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $I(a,b,c)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.

Une équation cartésienne de la sphère $S(I,R)$ est :

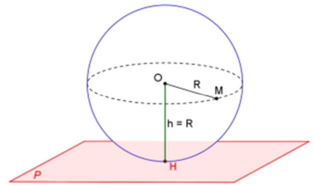
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2 = R^2$$

Théorème : *"Section plane d'une sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $S(I,R)$ une sphère de centre I et de rayon R. Soit P un plan, H le projeté orthogonal de I sur P. Posons d la distance de I à $(h = IH)$.

1. Si $h > R$, alors $S\cap P = \emptyset$. Donc S et P sont disjoints.
2. Si $h = R$, alors $S\cap P = \{H\}$. Donc S et P sont tangents en H.



3. Si $h < R$, alors $S\cap P =$ le cercle du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2-h^2}$.