I- Langage des probabilités:

* On appelle univers (ou univers des possibles) , l'ensemble des résultats (ou éventualités) possibles d'une expériences aléatoire.Cet ensemble se note Ω.

* Toute partie A de Ω est appelée événement.

* Si $A=\varnothing$, on dit que A est l'événement impossible.

* Si $A=\Omega$, on dit que A est l'événement certain.

* Si A est une partie contenant un seul élément de Ω , on dit que A est un événement élémentaire.

* L'événement $A\cap B$ est l'évènement " A et B ". Il est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés simultanément .

* L'événement $A\cup B$ est l'évènement " A ou B ". Il est réalisé si l'un au moins des deux événements A et B est réalisé.

* L'ensemble $C^A=\Omega\setminus A$, qu'on note $\overline{A}$, est l'évènement contraire de A .Il est réalisé ssi A n'est pas réalisé.

* Deux évènements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps .C-à-d ssi $A\cap B\neq\varnothing$.

* Si A et B sont deux évènements de Ω tels que $A\subset B$ alors $B\setminus A$ désigne l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A .

<u>Activité 1 p 309:</u>

Soit les évènements suivants:

A :"L'élève pratique des activités sportives ou culturelles"

B :"L'élève ne pratique ni des activités culturelles ni des activités sportives "

C :"L'élève pratique des activités culturelles et non sportives "

E :" L'élève pratique des activités culturelles "

F :" L'élève pratique des activités sportives "

1/ On a : $A=E\cup F$ donc :

$P(A)=P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)=0,35+0,4-0,1=0,65$

2/ On a : $B=\overline{A}$ donc $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=0,35$

3/ On a : $C=E\setminus F$ donc $P(C)=P(E\setminus F)=P(E)-P(E\cap F)=0,35-0,1=0,25$

Définition d'une probabilité:

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω, toute application $P:\ \mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]\ ;\ w\mapsto P(w)$ vérifiant :

❶ $P(\Omega)=1$

❷ Pour tout évènements A et B tels que $A\cap B=\varnothing$ on a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Propriétés:

Soient Ω un univers fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, P une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, A et B deux évènements. On a :

* La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est égale à 1.
* La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires dont la réunion est A.
* $0\le P(A)\le 1$
* Si $A\subset B$ alors $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$ et $P(A)\le P(B)$
* $P(\overline{A})+P(A)=1$
* $P(\varnothing)=0$
* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Activité 3 p 311:

	Visiteurs Tunisiens	Visiteurs étrangers	Total
Hommes	100	250	$\boxed{350}$
Femmes	90	$\boxed{270}$	$\boxed{360}$
Enfants	220	70	$\boxed{290}$
Total	$\boxed{410}$	$\boxed{590}$	$\boxed{1000}$

2/ a) $P(A)=\dfrac{360}{1000}=0,36$; $P(B)=\dfrac{590}{1000}=0,59$; $P(C)=\dfrac{220}{1000}=0,22$

b) $P(A\cap B)=\dfrac{270}{1000}=0,27$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,68$

c) D : " *Le billet choisi est celle d'un homme Tunisien* " ; $P(D)=\dfrac{100}{350}\approx 0,286$

II- Probabilité uniforme :

Définition:

Soient $\Omega=\{w_1;w_2;w_3;w_4;\cdots;w_n\};n\in\mathbb{N}^*$ *et* P *une probabilité définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit que P *est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité, dans ce cas on a :*

* $P(\{w_1\})=P(\{w_2\})=P(\{w_3\})=\cdots=P(\{w_n\})=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{card(\Omega)}$.

* *Pour tout évènement* A *on a :*

$$P(A)=\frac{\text{nombre des cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre des cas possibles}}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Activité 4 p 313 :

1/ L'ensemble des tirages possibles de Ω *est l'ensemble des applications d'un ensemble de* 3 *éléments vers un ensemble de* 7 *éléments, donc* $card(\Omega)=7^3$.

$P(A)=\dfrac{3^3\times 4^3}{7^3}=\cdots$

$P(B)=\dfrac{C_3^1\times 4^1\times 3^2}{7^3}=\cdots$; (C_3^1 : *choix de la place de la boule blanche tirée*).

$P(C)=\dfrac{C_3^1\times 4^2\times 3^1}{7^3}=\cdots$; (C_3^1 : *choix de la place de la boule qui porte le numéro* 1).

Type de tirage réalisant E : $(1B_1;1N_1;1N_2)$

$P(E)=\dfrac{C_3^1\times\left(C_2^1\times 3^1\times 2^1\right)\times 1^1}{7^3}=\cdots$

III- Probabilité conditionnelle :

Activité 1 p 314:

1/ $P(A)=\frac{30}{100}=0,3$; $P(B)=\frac{60}{100}=0,6$; $P(C)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

2/ a) $P(A\cap B)=\frac{10}{100}=0,1$

b) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6}=P(C)$

Définition:

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, A et B deux évènements tels que $P(B)\neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B et on lit :

" Probabilité de A sachant B ", le nombre réel : $P(A/B)=P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Propriétés :

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et B un évènement tel que $P(B)\neq 0$. On a :

* $P_B(\Omega)=1$
* Pour tous évènements incompatibles A_1 et A_2 on a : $P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)$
* Pour tout évènement A on a : $P_B(\overline{A})=1-P_B(A)$

IV- Evènements indépendants:

Définition:

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, A et B deux évènements.

A et B sont dits indépendants ssi $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ce qui est équivalent à :

$P_B(A)=P(A)$ si $P(B)\neq 0$.

Remarque :

Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Activité 4 p 317:

$card(\Omega) = 2^n$

1/ $\underline{n=2}$: $card(\Omega) = 2^2 = 4$

$P(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$F = \{(f;g);(g;f);(g;g)\}$; f : fille ; g : garçon ; $P(F) = \frac{3}{4}$

$M \cap F = \{(g;f);(f;g)\}$; $P(M \cap F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

On a : $P(M \cap F) \neq P(M) \times P(F)$ *donc les deux évènements M et F ne sont pas indépendants.*

2/ $\underline{n=3}$: $card(\Omega) = 2^3 = 8$

$\overline{M} = \{(f;f;f);(g;g;g)\}$; $P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

$F = \{(f;g;g);(g;f;g);(g;g;f);(g;g;g)\}$; $P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$M \cap F = \{(f;g;g);(g;f;g);(g;g;f)\}$; $P(M \cap F) = \frac{3}{8}$

On a : $P(M \cap F) = P(M) \times P(F)$ *donc les deux évènements M et F sont indépendants.*

3/ a) $\underline{n \geq 2}$:

$card(M) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k - C_n^0 - C_n^n = 2^n - 2$ *(avoir k filles $(1 \leq k \leq n-1)$ et $n-k$ garçons)*

Donc $P(M) = \frac{2^n - 2}{2^n}$

Ou bien :

Soit l'évènement M_k : *" avoir k filles et $n-k$ garçons "* ; *on a :* $card(M_k) = C_n^k$

$M=\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$ donc $card(M)=\sum_{k=1}^{n-1} card(M_k)=\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k 1^k \times 1^{n-k}=2^n-2$ Donc $P(M)=\dfrac{2^n-2}{2^n}$

Ou bien: $P(M)=1-P(\overline{M})=1-\dfrac{2}{2^n}=\dfrac{2^n-2}{2^n}$

$F:\left\{\underbrace{\left(f\ ;\ \underbrace{g\ldots g}_{(n-1)\text{ garçons}}\right)}_{\text{il ya } C_n^1=n \text{ possibilités}};\ \underbrace{\underbrace{(g\ ;\ldots g)}_{n\text{ garçons}}}_{\text{il ya une seule possibilité}}\right\}$ donc $P(F)=\dfrac{n+1}{2^n}$

b) $P(M\cap F)=P(M)\times P(F)\Leftrightarrow \dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2^n-2}{2^n}\times\dfrac{n+1}{2^n}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow n=3$

V – Principe des Probabilités composées:

Activité 1 p 317:

1/ On a : $A\cap B\subset A\Rightarrow 0\le P(A\cap B)\le P(A)=0\Rightarrow P(A\cap B)=0.$

2/ $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ d'où le résultat

3/ $\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)\\ P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

4/ $P(A\cap B\cap C)=P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B)\times P_{(A\cap B)}(C)=P(A)\times P_A(B)\times P_{(A\cap B)}(C)$

Principe des Probabilités composées:

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$; A, B et C trois évènements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, on a :

* $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)=P(A)\times P_A(B)$
* $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P_A(B)\times P_{(A\cap B)}(C)$

VI – Principe des probabilités totales – Formule de Bayes:

Activité 1 p 321:

a) $A=A\cap\Omega=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$

b) $P(A)=P\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)$ car $(A\cap B)\cap\left(A\cap\overline{B}\right)=\varnothing$

c) $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(B)\times P_B(A)+P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(A)$

d) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(B)\times P_B(A)}{P(B)\times P_B(A)+P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(A)}$

Principes des Probabilités totales:

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$; A et B deux évènements tels que $P(A)\notin\{0;1\}$, on a : $P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

Plus généralement :

Si $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, $n\notin\mathbb{N}^*$; $A_i\cap A_j=\varnothing$, $\forall\, i\neq j$ et $P(A_i)\neq 0$ alors pour tout évènement B on a

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P_{A_i}(B)$$

Formule de Bayes:

Soient Ω un univers, P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$; A et B deux évènements tels que $P(B)\notin\{0;1\}$ et $P(A)\neq 0$, on a : $P_A(B)=\dfrac{P(B)\times P_B(A)}{P(B)\times P_B(A)+P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(A)}$

Exercice n°01:

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires ; ces 6 boules sont indiscernables au toucher.

1/ On effectue quatre tirages successifs et sans remise d'une boule.

a) Calculer la Probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b) Calculer la Probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

2/ Même questions lorsque on effectue quatre tirages successifs d'une boule avec remise..

3/ On effectue n $(n \in \mathbb{N}^*)$ tirages successifs avec remise. On appelle P_n la Probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une blanche uniquement au dernier tirage.

a) Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_n.

b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$; $(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

Exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n° 02 :

Dans un laboratoire se trouve une cage avec 100 souris présentant deux caractères : sexe(mâle ou femelle), couleur (blanche ou noire) ; 87 sont mâles, 57 sont blanches et 55 sont mâles et blanches.

1/ Donner l'effectif par catégorie.

2/ Un assistant prend une souris au hasard. Calculer la probabilité pour qu'il obtient une souris blanche ou une souris mâle.

3/ Il décide de choisir 6 souris. Calculer la Probabilité pour qu'il obtient 6 souris blanches si les prélèvements sont réalisés:

a) Avec remise

b) Sans remise

Exercice n° 03:

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessaires nécessitant une hospitalisation.

1/ Sachant que ce vaccin a été administré à 680 femmes enceintes, qu'elle est la Probabilité qu'une femme enceinte ait eu une réaction secondaire si elle reçoit le vaccin ?

2/ Quelle est la Probabilité qu'une personne non enceinte ait une réaction secondaire ?

Exercice n°04 :

Une boite de médicament B_1 contient 10 comprimés jaunes.

Une boite de médicament B_2 contient 4 comprimés jaunes et 1 rouge.

Une boite de médicament B_3 contient 5 comprimés jaunes et 5 rouges.

1/ On prend une boite au hasard et de cette boite , on tire un comprimé au hasard .

On suppose que le comprimé tiré est rouge.

a) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_1 .

b) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_2 .

c) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_3 .

2/ On réunit les 25 comprimés des boites $B_1 ; B_2$ et B_3 . on tire au hasard un comprimé et le comprimé obtenu est rouge.

a) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_1 .

b) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_2 .

c) Calculer la Probabilité pour que le comprimé ainsi tiré provienne de la boite B_3 .

Exercice n°05:

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1/ On tire simultanément deux boules de l'urne ; déterminer :

a) La Probabilité P_1 de tirer 2 boules rouges.

b) La Probabilité P_2 de tirer 2 boules blanches.

c) La Probabilité P_3 de tirer 2 boules de couleurs différentes.

2/ On tire une boule , on note sa couleur , on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule , déterminer :

a) La Probabilité P_1' de tirer 2 boules rouges.

b) La Probabilité P_2' de tirer 2 boules blanches.

c) La Probabilité P_3' de tirer 2 boules de couleurs différentes.

Exercice n°06:

On tire au hasard, successivement et sans remise, 4 lettres du mot "ABDESSATTAR". On considère le mot formé par les lettres dans l'ordre où elles apparaissent.

Quelle est la Probabilité d'obtenir le mot "STAR" ?.

Exercice n°07:

On considère un espace probabilisé et deux évènements A et B.

Calculer $P(A\cup B)$ et $P_A(B)$ sachant que $P(A)=0,5$; $P(B)=0,4$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,6$.

Exercice n°08:

Soit A_1 et A_2 deux ensembles de boules. On suppose que A_1 contient $70\,\%$ de boules blanches et que A_2 en contient $80\,\%$, on suppose en outre que A_1 contient trois fois plus de boules que A_2. On place toutes les boules de A_1 et A_2 dans une même urne. On en tire un au hasard , on constate qu'elle est blanche .

Quelle est la probabilité pour que cette boule provienne de A_1.

Exercice n°09:

Mr Chokri arrive à un carrefour. Il sait qu'à cet endroit il va trouver deux routes, une seule de ces routes qui amène à Hajeb Laayoun. Il y a trois frères à ce carrefour.

F_1 dit la vérité 2 fois sur 10.

F_2 dit la vérité 5 fois sur 10.

F_3 dit la vérité 9 fois sur 10.

Il n'y a pas d'autre personne à ce carrefour ; Mr Chokri s'adresse au hasard à un ,et à un seul des trois frères. Il demande son chemin, et s'aperçoit par la suite que ce chemin est le bon .

Quelle est la Probabilité qu'il se soit adressé à F_1 ?

Exercice n°10:

Quand il pleut la Probabilité qu'il pleuve le lendemain est $0{,}8$ *, elle est seulement de* $0{,}3$ *s'il fait beau. Aujourd'hui il fait beau . Quelle est la Probabilité qu'il fasse beau dans* 10 *jours ?*

Exercice n°11:

Quelle est la Probabilité pour un point pris au hasard à l'intérieur d'une sphère de rayon R *d'être plus prés du centre que de la surface de la sphère ?*

Exercice n°12:

Une urne contient r *boules rouges et* n *boules noires. Une boule est choisie au hasard on note sa couleur, et on la remet avec* d *boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire. Trouver la probabilité pour que :*

a) La seconde boule tirée soit noire.

b) La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.