EQUATIONS ET PROBLEMES DU SECOND DEGRE

I. Activité1 :

1) a- vérifier que $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$
   b- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 6x + 5 = 0$
2) Etant donné trois réels $a \neq 0$; b et c et x inconnue

   On se propose de résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en x

   a- $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - x^2$ en déduire que $x^2 + xy = (x+ y/x)^2 - (y/2)$
   b- Compléter :
   $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \ldots.+ c/a)$
   $=a((x +\ldots.)^2 - \ldots. + c/a)$
   c- Etablir que l'égalité : $ax^2 + bx + c = a[(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2]$
   L'écriture a $[(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2]$ s'appelle forme canonique de $ax^2 + bx + c$
3) **<u>Résolution de l'équation E :</u>** $ax^2 + bx + c = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à
   $a[(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2] = 0$
   $[(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2] = 0$ puisque $a \neq 0$ équivaut à …

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ s'appelle discriminant de (E))
*** 1er cas si** $\Delta<0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car
$\Delta<0$ équivaut à $(b^2 - 4ac)/4a^2<0$ équivaut à
$-(b^2 - 4ac)/4a^2 >0$ équivaut à$(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2 >(b^2 - 4ac)/4a^2 >0$
D'où $(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2 >0$
Par la suite$[(x +b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2] \neq 0$

* **2^{éme} cas si** $\Delta>0$ (E) équivaut à $[(x+b/2a)^2 - (\sqrt{\frac{b^{2-4ac}}{4a^2}})^2]=0$

Equivaut à $[(x+b/2a) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}] [(x+b/2a) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}] = 0$

Equivaut à $(x+b/2a - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}) (x+b/2a + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}) = 0$

Si a>0

$(x+b/2a - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) (x+b/2a + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$

Equivaut à $x+b/2a - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x+b/2a + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

Equivaut à $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Equivaut à $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc $S_{\mathbb{R}} = [x', x'']$

***3ème cas si** $\Delta = 0$ (E) équivaut à $(x\frac{b}{2a}+)^2 = 0$

Equivaut $x + \frac{b}{2a} = 0$ équivaut à $x = -\frac{b}{2a}$ **Donc** $S_{\mathbb{R}} = [-\frac{b}{2a}]$

- **Remarque 1 : si on remplace dans X' et X " de 2ème cas Δ par 0**

on obtient X' = X " =$-\frac{b}{2a}$ on dit que si

Δ = 0 (E) admet une solution double =$-\frac{b}{2a}$

- **Remarque 2 : toute solution de (E) s'appelle aussi racine de (E)**