

I. Présentation des suites numériques :**Définition d'une suite :**

Une suite (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble \mathbb{N} qui à tout entier naturel n associe un et un seul réel noté u_n .

Autrement écrit :

$$\begin{array}{ccc} (u_n) : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & u_n = u(n) \end{array}$$

Remarque : l'image de l'entier n est notée u_n au lieu de $u(n)$.

A retenir : On dit que u_n est le terme de rang n ou le terme d'ordre n ou le terme d'indice n de la suite. u_n est aussi appelé le terme général de la suite (u_n) .

Avec quoi peut-on définir une suite ?

Il y a deux manières de définir une suite :

Par une formule explicite comme une fonction.

Par exemple, on peut parler de la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $U_n = \frac{n}{n+1}$

Pour calculer u_{34} , il suffit juste de remplacer n par 34. C'est comme pour les fonctions.

Cette suite est en fait un raccourci de la fonction $f(x) = \frac{x}{(x+1)}$.

En effet, pour tout entier n , $u_n = f(n)$.

Exercice n° 01

On considère la suite $(u_n)_{n>3}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2 - 4}$.

Calculer u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_{100} .

Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n , et montrer que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n > 3$.

Exercice n° 02

Soit la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1+n^2}{n^2}$.

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Calculer en fonction de n : u_{n+1} ; u_{2n} et u_{2n+1} .

c) Montrer que $n^2(u_n - u_{2n}) = \frac{3}{4}$.

Par une formule de récurrence.

C'est-à-dire qu'un terme est défini par rapport au précédent.

Par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 & \text{un premier terme...} \\ \text{Pour tout entier } n, & u_{n+1} = 4 - 7 \times u_n \end{cases}$$

Pour calculer u_{34} , il faut auparavant calculer u_1, u_2, \dots, u_{32} et u_{33} . C'est-à-dire tous les termes qui le précèdent...

Un vrai travail de calculatrice ou d'ordinateur !

C'est pour cela que le plus souvent, on essaie de trouver une formule explicite. Sauf que parfois il n'y en a pas...

Il existe certainement d'autres façons de définir des suites mais elles ne sont quasiment pas employées au lycée. C'est pour cela que nous nous bornerons à ces deux manières.

Exercice n° 03

On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n - 3$. Calculer w_1 ; w_2 ; w_3 et w_4 .

Exercice n° 04

Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes :

a) $U_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$; b) $U_n = -2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; c) $U_n = \frac{2}{n-3}$, $n \geq 4$; d)
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + n - 1, \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n + (-1)^n \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

Exercices 1, 2 et 3 page 18.

II. Suites arithmétiques :

Définition d'une suite arithmétique.

Dire que la suite (u_n) est arithmétique de raison r signifie que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$

Ainsi, si (u_n) est une suite arithmétique alors :



Par exemple, la suite 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ... est la suite arithmétique de 1er terme 2 et de raison 3.

Remarque :

pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout entier n ,

$$u_{n+1} - u_n = \text{constante} = r$$

Exercice n° 05

- 1) Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n = n$ est une suite arithmétique.
- 2) Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$ est une suite arithmétique de raison 2.
- 3) Prouver que la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 3 + V_n \end{cases}$$
 est arithmétique et calculer sa raison .
- 4) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n = 5n + 10$ est une suite arithmétique

Exercice 4 page 18.

Propriété :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier n , $u_n = u_0 + n \times r$

De même, si n et p sont deux entiers naturels quelconques alors : $u_n = u_p + (n - p) \times r$

Ces formules permettent de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique ou bien encore sa raison.

Exercice n° 06

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r .

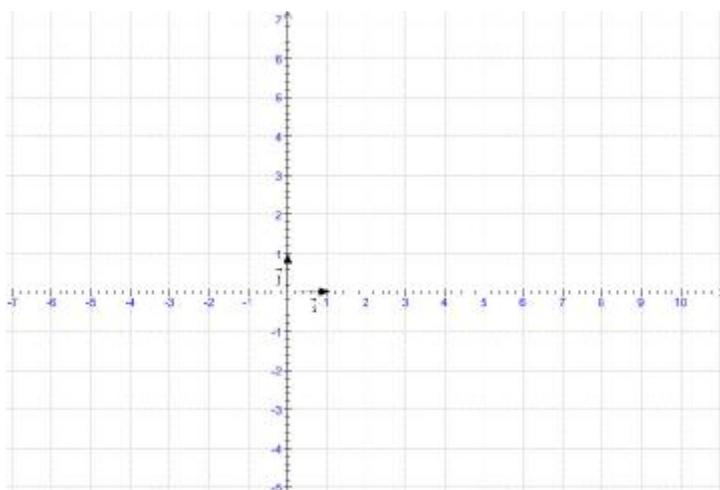
- Sachant que $r = 2$ et $u_4 = 30$, calculer u_0 et u_8 .
- Sachant que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$, calculer r et u_0 .
- Sachant que $u_1 = 2\pi$ et $u_3 = 4\pi^2$, calculer u_2 .

Représentation graphique :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

- a) Placer les points $A_0(0, u_0)$, $A_1(1, u_1)$ et $A_2(2, u_2)$.
- b) Vérifier que les points A_0 , A_1 et A_2 sont sur une même droite D , que l'on précisera.
- c) Montrer que, pour tout entier n , le point $A_n(n, u_n)$ appartient à D .



Somme des n premiers entiers :

Si le premier terme est u_0 , la somme des n premiers termes est

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Si le premier terme est u_1 , la somme des n premiers termes est $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$

Attention la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est une somme de $(n + 1)$ termes.

Théorème :

Si n est un entier naturel non nul alors :

$$S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

ou plus généralement : $S = \frac{\text{nombre de termes} \times 1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

Par exemple, la somme des 100 premiers entiers est égale à :

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = 5050$$

Exercice n° 07

(u_n) désigne une suite arithmétique de raison r , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- Sachant que $r = 5$ et $u_0 = 1$, calculer u_4 et S_{10} .
- Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, calculer r et u_0 .

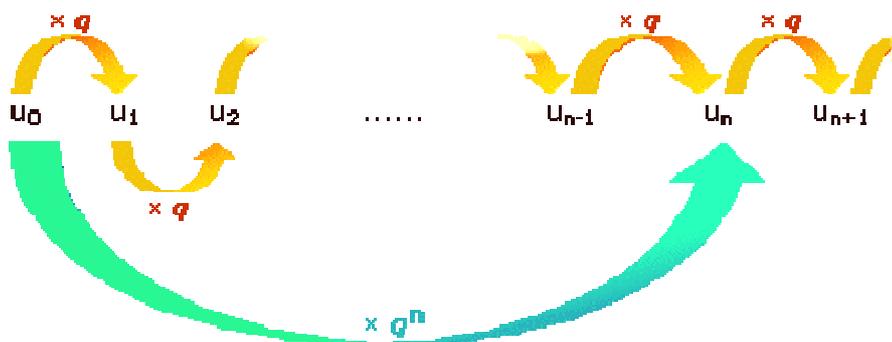
III. Suites géométriques :

Définition d'une suite géométrique.

Dire que la suite (u_n) est géométrique de raison q signifie que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Ainsi, si (u_n) est une suite est géométrique alors :



Par exemple, la suite 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48... est la suite géométrique de 1er terme 3 et de raison 2

Propriété :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$

De même, si n et p sont deux entiers naturels quelconques alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Ces formules permettent de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique ou bien encore sa raison.

Exemple :

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ et telle que $u_7 = 24$. Déterminer u_{13} .
Nous pourrions passer par le premier terme de la suite u_0 . Mais ce n'est pas nécessaire.

On peut écrire que :

$$u_{13} = u_7 \times q^{13-7} = 24 \times (-3)^6 = 24 \times 729 = 17496$$

Déterminer la raison q et le premier terme v_0 de la suite géométrique (v_n) sachant que $v_4 = 7$ et $v_7 = 56$.

Commençons par la raison q . On peut écrire que :

$$v_7 = v_4 \times q^{7-4} \quad d'où \quad 56 = 7 \times q^3 \quad d'où \quad q^3 = 8 \quad d'où \quad q = 2$$

Car un seul nombre a pour cube 8 : il s'agit de 2.

Pour ce qui est du premier terme v_0 , on peut écrire que :

$$v_4 = v_0 \times q^4 \quad d'où \quad 7 = v_0 \times 2^4 \quad d'où \quad \frac{7}{16} v_0 =$$

Exercice n°08

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q .

- Sachant que $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$, calculer u_4 .
- Trouver toutes les suites géométriques telles que $u_0 = 1$ et $u_2 = 1$.

Le truc en plus :

pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que le quotient de deux termes consécutifs est constant. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout entier n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \textit{constante}$$

Exercice n°09

Pour chacun des cas suivants, la suite est-elle géométrique ? si oui, préciser son premier terme et sa raison.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5}{3^n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 5 \times 2^{n-1}$.
- $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2u_{n-1} + 1 \end{cases}$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^{n+1} \times 2^{-n}$.

Somme des $n+1$ premières puissances d'un nombre réel.

Théorème :

Si n est un entier naturel non nul et si q est un réel différent de 1 alors :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{Et dans le cas général : } S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Par exemple, la somme des 11 premières puissances de 2 est égale à :

$$1 + 2 + 4 + \dots + 1024 = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$$

Exercice n°10

(u_n) désigne une suite géométrique de raison q , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- Sachant que $u_0 = 3$ et $q = -5$, calculer u_3 et S_3 .
- Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer S_{63}

Exercice n°11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout n de \mathbb{N} par $v_n = u_n - a$; a étant un réel fixé.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de a .
Déterminer une valeur de a pour laquelle la suite (v_n) est géométrique.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n de \mathbb{N} par $v_n = u_n - 3$.
Exprimer v_n en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n .
3. Soit n un entier. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
Vérifier pour $n = 5$ en calculant u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Exercice n°12

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de deuxième terme $u_1 = 12$.

1. Montrer que la raison de cette suite est 4.
2. Calculer u_n en fonction de n .
3. Soit $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - a) Calculer S en fonction de n .
 - b) Déterminer l'entier n pour que S soit égale 63.