# CH4 – Géométrie : Homothétie

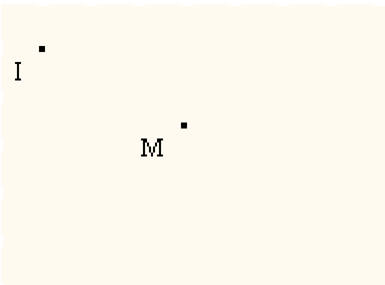
Novembre 2009
A. LAATAOUI

## Définition :

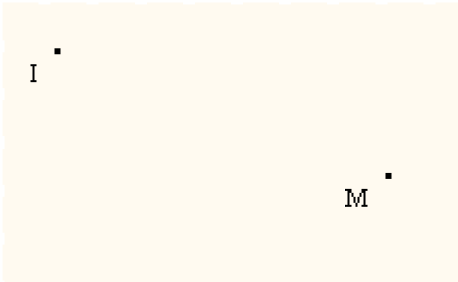
*Introduction :*

Soit I un point du plan et M $\neq$ I.
Construire M' dans chacun des cas suivants :

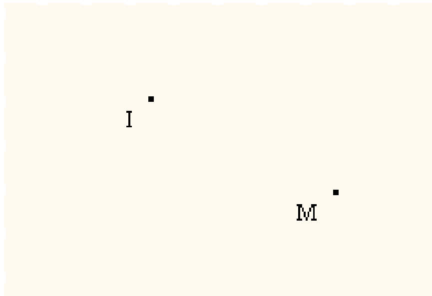
$\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$




$\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$




$\overrightarrow{IM'} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{IM}$




*Définition :*

Etant donnés un point I et un réel non nul k.
On appelle homothétie de centre I et de rapport k, toute application $h : P \to P, M \mapsto M'$ telle que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.
On note $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

*Cas particuliers :*

- Si k = 1 alors $h_{(I,1)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM}$ équivaut à $M' = M$.
  $h_{(I,1)}$ est ……………………………………………………………………....
- Si k = - 1 alors $h_{(I,-1)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$ équivaut à $I = M * M'$ équivaut à $S_I(M) = M'$.
  $h_{(I,-1)}$ est ……………………………………………………………………....

*Remarque :*
Si $h_{(I,k)}(M) = M'$ alors I, M et M' sont alignés.

Activité 4 page 131 : « Construction du centre d'une homothétie connaissant son rapport, un point et son image »

Activité 5 page 132.

## Propriétés :

*Propriété caractéristique :*
Si $h_{(I,k)}(M) = M'$ et $h_{(I,k)}(N) = N'$.

Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

…………………………………………………………………………………………………………………………

Ainsi on a : $\boxed{\text{Si } h_{(I,k)}(M) = M' \text{ et } h_{(I,k)}(N) = N' \text{ alors } \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}}$

<u>Conséquence :</u>

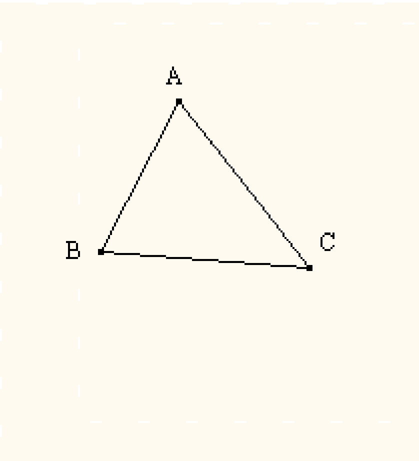
Si $\left.\begin{matrix} h_{(I,k)}(A) = A' \\ et \\ h_{(I,k)}(B) = B' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et par suite, on a : (A'B') ….(AB) et A'B' = ……AB.

Si $|k| > 1$ alors h agit comme un ………………………………..

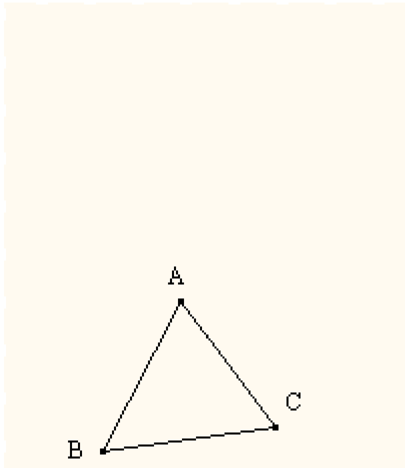
Si $|k| < 1$ alors h agit comme un ………………………………..

Construire dans chacun des cas suivants, l'image du triangle ABC par $h_{(A,k)}$

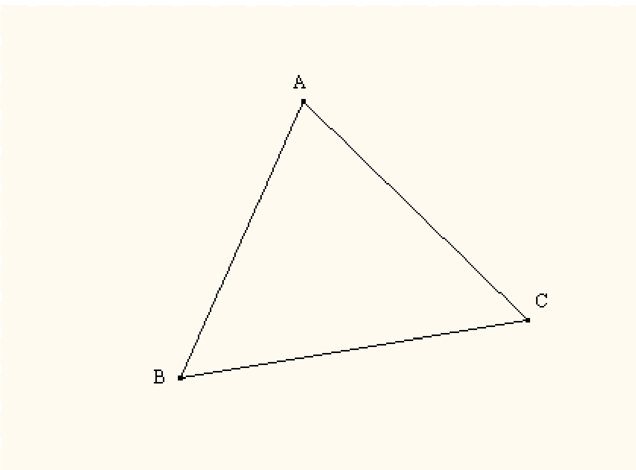
K = 2



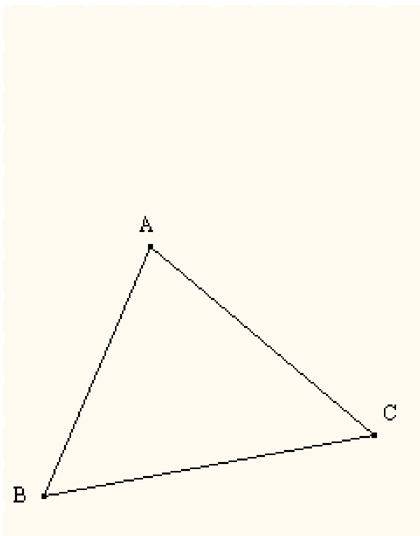

K = -2




K = $\frac{1}{2}$




K = - $\frac{1}{2}$




<u>Remarque :</u>

Dans tous les cas qui précèdent on a : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |k|$.

L'image d'un triangle par une homothétie est un triangle qui lui est ……………………………………
Une homothétie est une application du plan qui multiplie les distances par une constante positive.
Une homothétie est donc dite « **Similitude** ».

<u>Exercices 1, 2, 3, 4, 5 et 6 page 140.</u>
<u>Exercice 2 page 145.</u>

*<u>Conservation du barycentre :</u>*
Soit G le barycentre des points pondérés $(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$.

On note G', A' et B' les images respectives des points G, A et B par $h_{(I,k)}$.

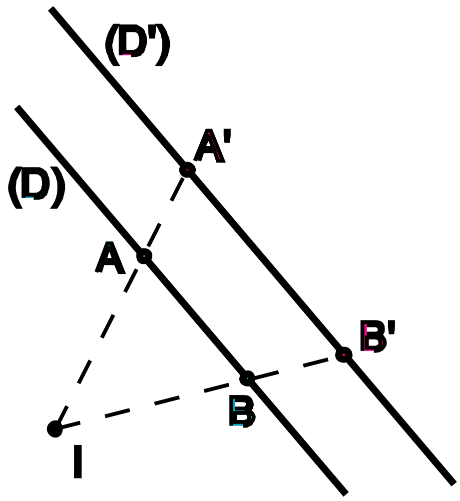
Montrer que G' le barycentre des points pondérés $(A',\alpha)$ et $(B',\beta)$.

…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
Une homothétie conserve ………………………………..
Par conséquent : Une homothétie conserve le milieu et l'alignement.

## *<u>Images de quelques parties du plan:</u>*

**L'image d'une droite** :

a) L'image d'une droite par une homothétie est :
……………………………………………………………........................



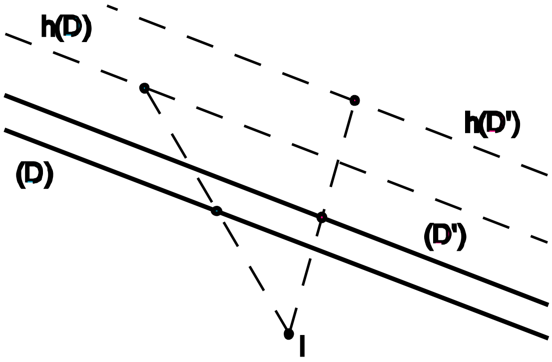

b) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport k non nul. Si A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par h, alors : h((AB)) = ……………………

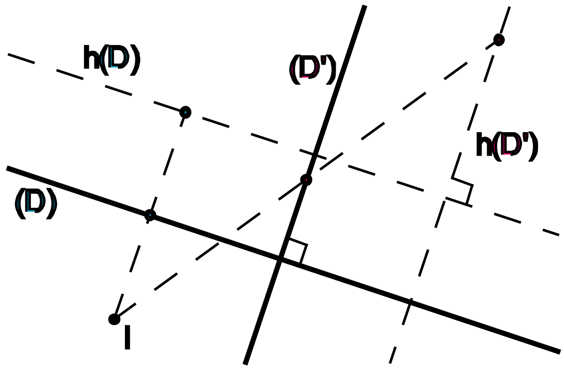
c) <u>Cas particulier</u> :
Si le centre de l'homothétie appartient à une droite (D) alors l'image de (D) par cette homothétie est : ……………………………………

- **Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité** :

* Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont :
…………………………………………….
Si (D) et (D') sont deux droites parallèles alors h((D)) et h((D')) sont deux droites parallèles.

*Les images de deux droites perpendiculaires par une homothétie sont :
……………………………………………
Si (D) et (D') sont deux droites perpendiculaires alors h((D)) et h((D')) sont deux droites perpendiculaires .

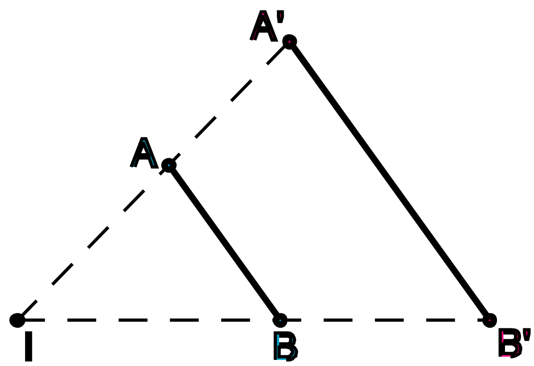



**L'image d'un segment** :

*  L'image d'un segment par une homothétie est :……………………..
Si  h est une homothétie et A et B  sont deux points du plan d'images respectives A' et B' par h,  alors :

h( [AB] ) = [A'B']
A'B' =…………………………




**L'image d'un cercle** :

* L'image d'un cercle par une homothétie est :…………..
Si h une homothétie de centre I et  de rapport  non nul k
et  si  C  est un  cercle de centre O et de   rayon r  et O'= h(O),
alors    h(C $_{( O, r)}$ ) = C' $_{( O', |k|r )}$ .