• Division euclidienne :

Définition :

Soient a et b 2 entiers tels que $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver l'unique couple (q,r) tel que $a = bq+r$ avec $0 \leq r < b$
q: est le quotient ; r est le reste

Remarque : si r = 0, on dit alors que b divise a ou a est divisible par b ou a est un multiple de b. On note $b|_a$.

Applications

1. Montrer que la somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
2. Montrer que si n divise a et n divise b alors n divise a+b et n divise ab
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
3. Soit n un entier pair . Montrer que n^2 est divisible par 4
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
4. Soit un entier impair. Montrer que n^2-1 est divisible par 8(indication : montrer d'abord que le produit de 2 entiers consécutifs est un nombre pair)*
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..

5\. a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel n par 3
……………………………………………………………………………………………………..

b) montrer que pour tout entier naturel n on a : $n^3 - n$ est divisible par 3
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..

6. a) Montrer que $\frac{4n+10}{n+1} = 4 + \frac{6}{n+1}$ ……………………………………………………………..

b) En déduire les entiers naturels n tel que $\frac{4n+10}{n+1}$ soit un entier naturel
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..

- ***Divisibilité par 3, 4, 5, 8, 9 et 25 :***

1. Un entier est divisible par 3 si et seulement si
   la somme de ses chiffres est divisible par 3 .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3.

2. Un entier est divisible par 4 si et seulement si
   le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 est égal au reste de la division euclidienne par 4 du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

3. Un entier est divisible par 5 si et seulement si
   son chiffre des unités est divisible par 5 (c'est –à- dire il est égal à 0 ou 5) .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 5 est égal au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 5.

4. Un entier supérieur à 100 est divisible par 8 si et seulement si
   le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8 .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres.

5. Un entier est divisible par 9 si et seulement si
   la somme de ses chiffres est divisible par 9 .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 9 est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 9.

6. Un entier est divisible par 25 si et seulement si
   le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25 .

   Le reste de la division euclidienne d'un entier par 25 est égal au reste de la division euclidienne par 25 du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

Exercice :

Un nombre n est dit un palindrome d'un nombre m si l'écriture décimale de n correspond à l'envers de l'écriture décimale de m (3251 est un palindrome de 1523)

a) Choisir 2 nombres palindromes et vérifier que leur différence est divisible par 9

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

b) Démontrer que la différence de 2 nombres palindromes est divisible par 9(vous pouvez prendre 2 nombres à 3 chiffres)

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

- ***Divisibilité par 11 :***

Soit a un entier naturel .On désigne par S_1 la somme des chiffres de a de rang impairs (de droite à gauche) et par S_2 la somme des chiffres de a de rang pairs et on considère l'entier relatif $m = S_1 - S_2$.

- Si $(m \geq 0)$ alors on a :
* a est divisible par 11 si et seulement si m est divisible par 11.
* Le reste de la division euclidienne de a par 11 est le même que le reste de la division euclidienne de m par 11

- Si $(m < 0)$ alors on a :
* a est divisible par 11 si et seulement si (m + 11p) est divisible par 11.
* Le reste de la division euclidienne de a par 11 est le même que le reste de la division euclidienne de (m + 11p) par 11 .
(p désigne le plus petit entier naturel tel que m + 11p soit positif ou nul)

(Par exemple pour a = 609181 ; $m = S_1 - S_2 = (1+1+0) - (8+9+6) = -21 < 0$; p = 2 ; m + 11p = 1) .

Exercice n°1

Soit n=3a6b4 où a et b désignent respectivement le chiffre des milliers et le chiffre des dizaines
1. Montrer que n est divisible par 11 si et seulement si a+b = 13 ou a+b = 2
2. En déduire alors les valeurs de a et b pour les quelles n est divisible par 11

……...
……..
……...
……...

Exercice n°2

n	Le reste de divisibilité de n par 4	Le reste de divisibilité de n par 8	Le reste de divisibilité de n par 9	Le reste de divisibilité de n par 25
35479				
98752315				
9870540				
357689				
365555437				

Exercice n°3

1) Sans faire la division, dire quel est le reste de la division euclidienne de 123456 par 11 ?
2) Déterminer le chiffre a pour que le nombre 3a27 soit divisible par 9 .
3) Déterminer le chiffre b pour que le reste de la division euclidienne de 72b56 par 11 soit égal à 2 .
4) Déterminer le chiffre c pour que le nombre 17091c soit divisible par 11 .