Chapitre 13

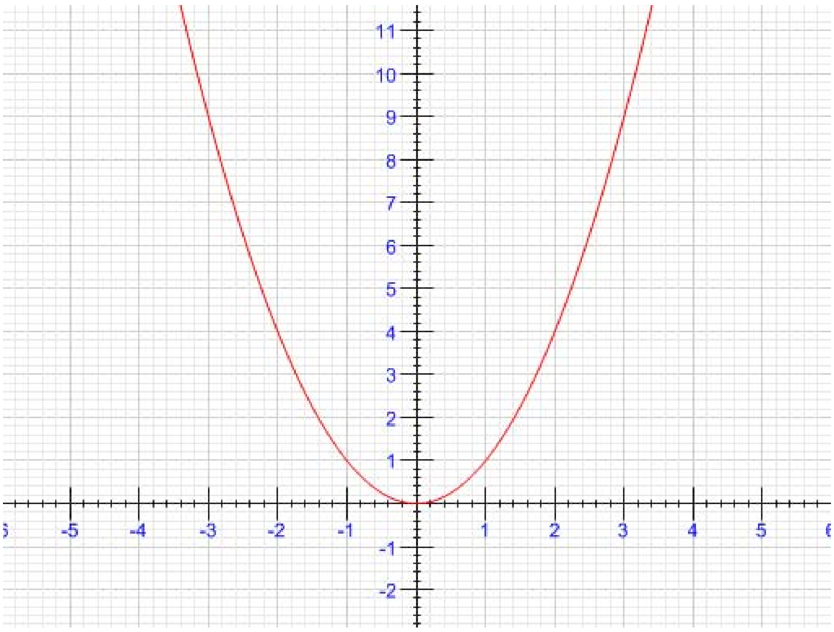
Fonctions de référence

I – Fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \mapsto x^2$

   f *est définie sur* $\mathbb{R}$, la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une parabole.

x	-10^{10}	-10^5	-5	-2	0	2	5	10^5	10^{10}
$f(x)$	10^{20}	10^{10}	25	4	0	4	25	10^{10}	10^{20}



La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc f est une fonction paire

f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ c.à.d. f est une fonction positive.

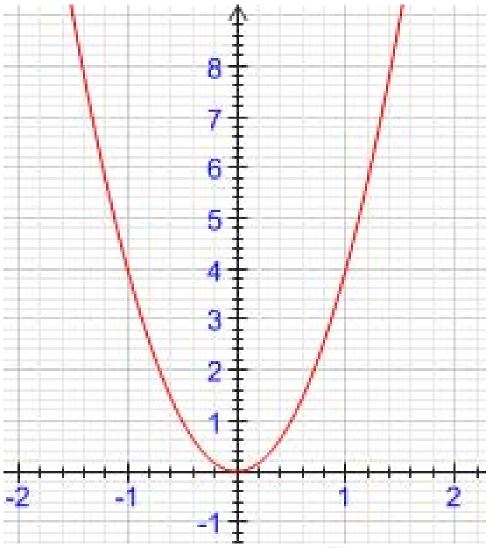
- f est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ *on a* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- variations de f :
  Soient a *et* b *deux réels de* $]-\infty, 0]$ *tel que* $a < b$; $f(a) = a^2$ *et* $f(b) = b^2$
  on a : $a < b$ *alors* $a^2 > b^2$ *ce qui implique* $f(a) > f(b)$ *car a et b sont négatifs*
  $(exemple : -10 < -2$ *et* $(-10)\verb|^|2 = 100;\ (-2)\verb|^|2 = 4$ *et* $100 > 4)$
  donc on conclu que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$
  Soient a *et* b *deux réels de* $[0, +\infty[$ *tel que* $a < b$; $f(a) = a^2$ *et* $f(b) = b^2$
  on a : $a < b$ *alors* $a^2 < b^2$ *ce qui implique* $f(a) < f(b)$ *car a et b sont posifs*
  $(exemple : 5 < 10$ *et* $5^2 = 25;\ 10^2 = 100$ *et* $5 < 100)$
  on conclu que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- Soit A un réel strictement positif très grand
  $A > 0$, *soit x un réel tel que* $x > A$ *alors* $x^2 > A^2$ *donc* $f(x) > f(A)$; on dit que f tend vers $+\infty$ *quand x tend vers* $+\infty$
  $A > 0$, *soit x un réel tel que* $x < -A$ *alors* $x^2 > (-A)^2$ *donc* $f(x) > f(-A)$; on dit que f tend vers $+\infty$ *quand x tend vers* $-\infty$

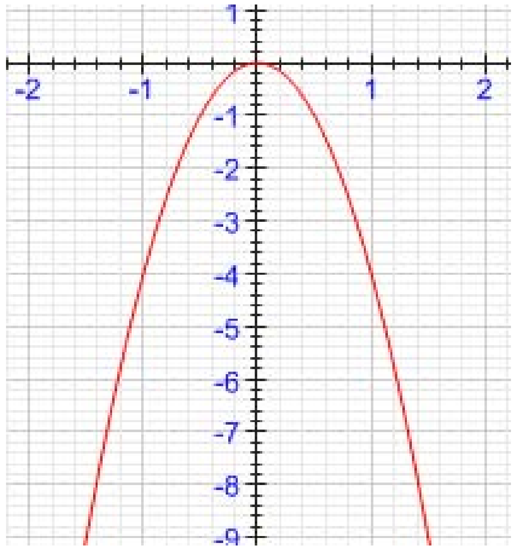
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \neq 0$

$x \mapsto ax^2$

$Si\ a > 0$ (exemple $a = 4$) $Si\ a < 0$ (exemple $a = -4$)



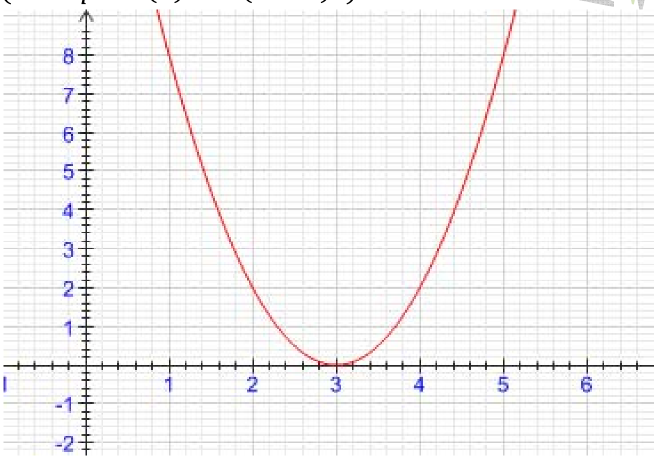


Les deux courbes représentatives ici sont déduites de la courbe représentative de $f(x) = x^2$ par une homothétie $h_{\left(O,\frac{1}{a}\right)}$ de centre O origine du repère et de rapport $1/a$

3) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \neq 0$

$x \mapsto a(x - \alpha)^2$

$(exemple\ h(x) = 2(x-3)^2)$

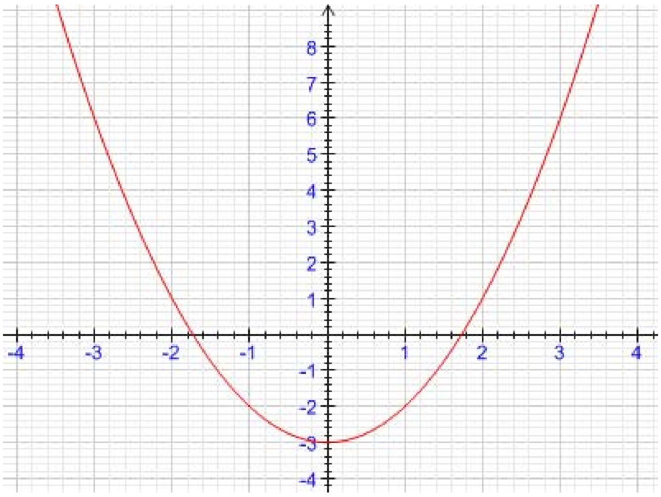


La courbe représentative de $h(x) = a(x-\alpha)^2)$ est une parabole de sommet $S(\alpha, 0)$ et un axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ elle est déduite de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ par la composée de deux applications une homothétie $h_{\left(O,\frac{1}{a}\right)}$ et une translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{i}$

4) $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto x^2 + \beta$

$(exemple\ k(x) = x^2 - 3)$

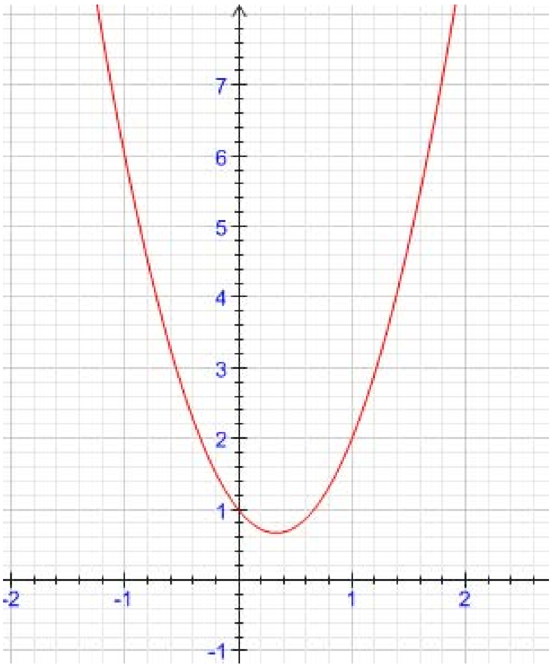


La courbe représentative de $k(x) = x^2 + \beta$ est une parabole de sommet $S(0, \beta)$ et un axe de symétrie la droite des ordonnées ($x = 0$), elle est déduite de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{v} = \beta\vec{j}$

5) $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad ;\ a \neq 0$

$\quad x \mapsto ax^2 + bx + c$

$(exemple\ p(x) = 3x^2 - 2x + 1)$



$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$

La courbe représentative de p est une parabole de $S(\alpha, \beta)$ et un axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$, elle est déduite de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ par la composée de deux applications une homothétie $h_{\left(O, \frac{1}{a}\right)}$ et une translation de vecteur

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$

II – Fonctions du type $f(x) = \sqrt{x+b}$

1) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$

f est définie sur $[0,+\infty[$ car $\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geq 0$

Pour tout a et b de $[0,+\infty[$ tel que $a < b$ on a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ $ce\ qui\ implique\ f(a) < f(b)$

Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$

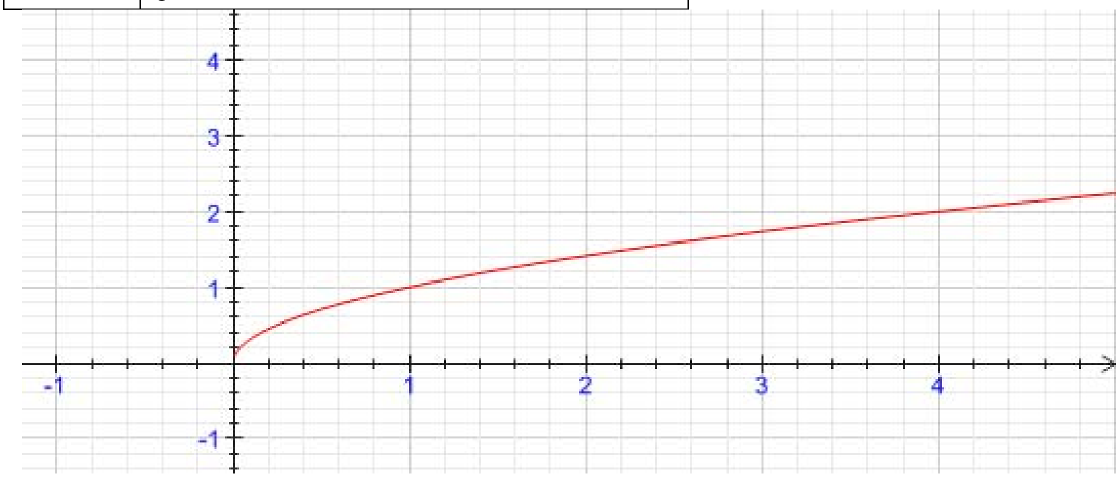
Soit A un réel positif très grand

$A > 0\ alors\ A^2 > A > 0, soit\ x \in [0,+\infty[\ tel\ que\ x > A^2 alors\ \sqrt{x} > \sqrt{A^2}\ donc$

$donc\ f(x) > |A|\ c.à.d.\ f(x) > A$, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

x	0	1	4	9	16	100	10^{10}	10^{40}
$f(x)$	0	1	2	3	4	10	10^5	10^{20}

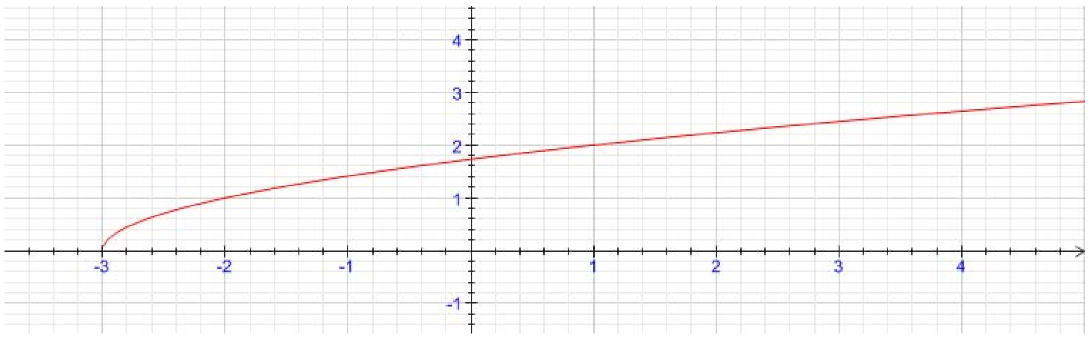
x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$



2) $g : [-b,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x+b}$

$(exemple\ g(x) = \sqrt{x+3})$



La courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x+b}$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u} = -b\vec{i}$

III – Fonctions du type $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$; $c\neq 0$

1) $f:\ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto \frac{1}{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

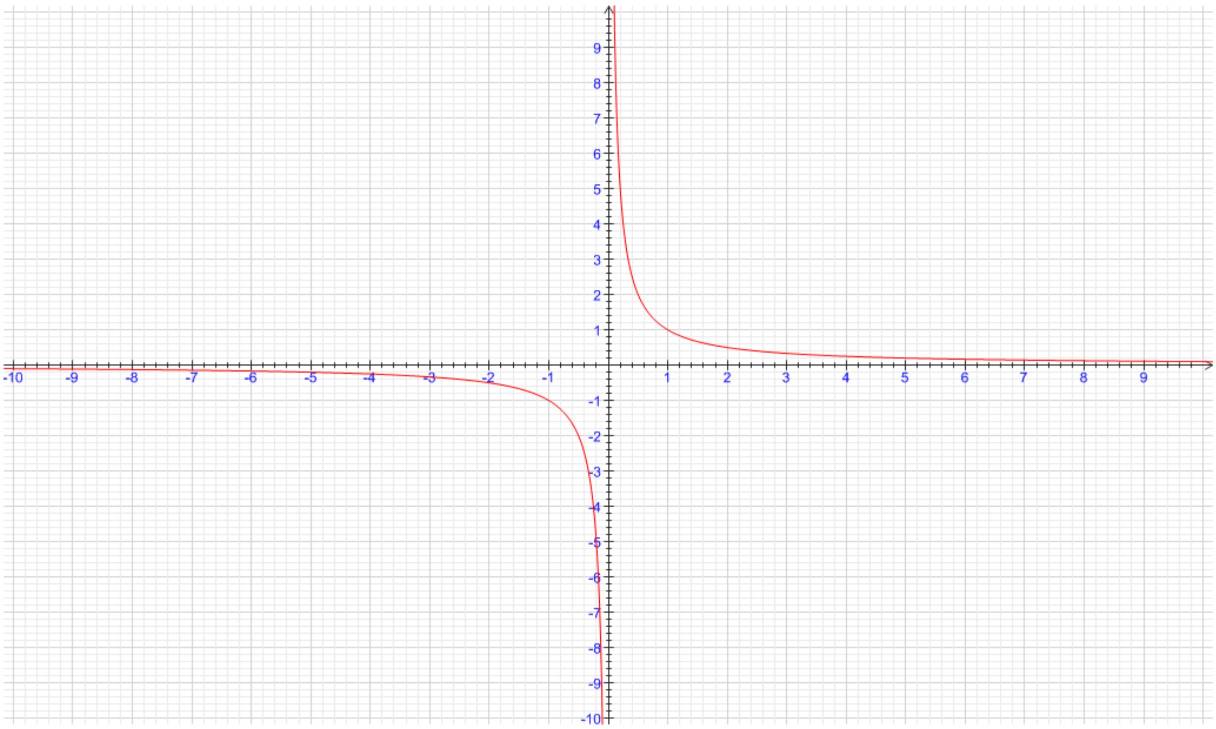
x	-10^{10}	-10^{2}	-10	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	-10^{-2}	-10^{-10}
$f(x)$	-10^{-10}	-10^{-2}	$-0{,}1$	$-0{,}5$	-1	-2	-10	-10^{2}	-10^{10}

x	10^{-10}	10^{-2}	$0{,}1$	$0{,}5$	1	2	10	10^{2}	10^{10}
$f(x)$	10^{10}	10^{2}	10	$0{,}5$	1	2	$0{,}1$	10^{-2}	10^{-10}

- Soient a et b deux réels de $]0,+\infty[$ tel que $a<b$, on a $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ donc $f(a)>f(b)$
  Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
- Soient a et b deux réels de $]-\infty,0[$ tel que $a<b$, on a $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ donc $f(a)>f(b)$
  Alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$
- Soit A un réel strictement positif très grand et ε un réel strictement positif très petit et tel qu'on a $\frac{1}{A}<\varepsilon$
  $A>0$, soit $x\in D_f$ tel que $x>A$ alors $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{A}$ donc $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$ soit $0<f(x)<\varepsilon$
  On dit que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$
- $\varepsilon>0$, soit $x\in D_f$ tel que $0<x<\varepsilon$ donc $\frac{1}{x}>\frac{1}{\varepsilon}$ or on a $\frac{1}{A}<\varepsilon$ donc $\frac{1}{\varepsilon}>A$ d'ou $f(x)>A$
  On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0
- $A>0$, soit $x\in D_f$ tel que $x<-A$ alors $\frac{-1}{A}<\frac{1}{x}<0$ or on a $\frac{1}{A}<\varepsilon$ donc $\frac{-1}{A}>-\varepsilon$
  soit $-\varepsilon<\frac{-1}{A}<f(x)<0$ donc $-\varepsilon<f(x)<0$
  On dit que f tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$
- $\varepsilon>0$, soit $x\in D_f$ tel que $-\varepsilon<x<0$ donc $\frac{1}{x}<\frac{-1}{\varepsilon}$ or on a $\frac{1}{A}<\varepsilon$ donc $\frac{-1}{\varepsilon}<-A$ d'ou $\frac{1}{x}<\frac{-1}{\varepsilon}<-A$ soit $f(x)<-A$
  On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

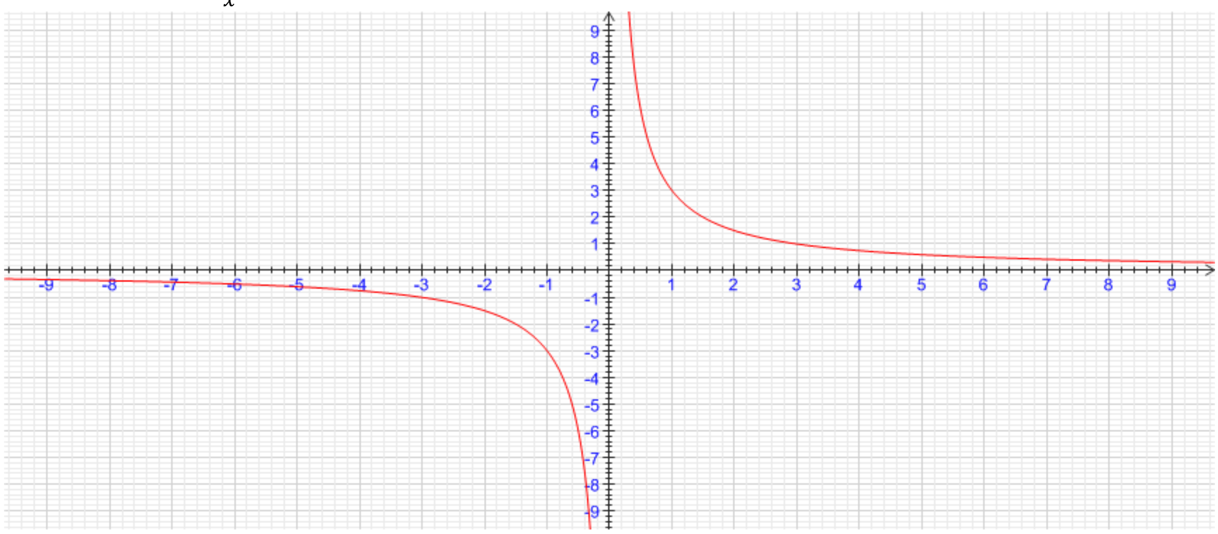
La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ est appelée hyperbole, le point O(0,0) est appelé le centre de l'hyperbole et les droites d'équations $x=0$ et $y=0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole.



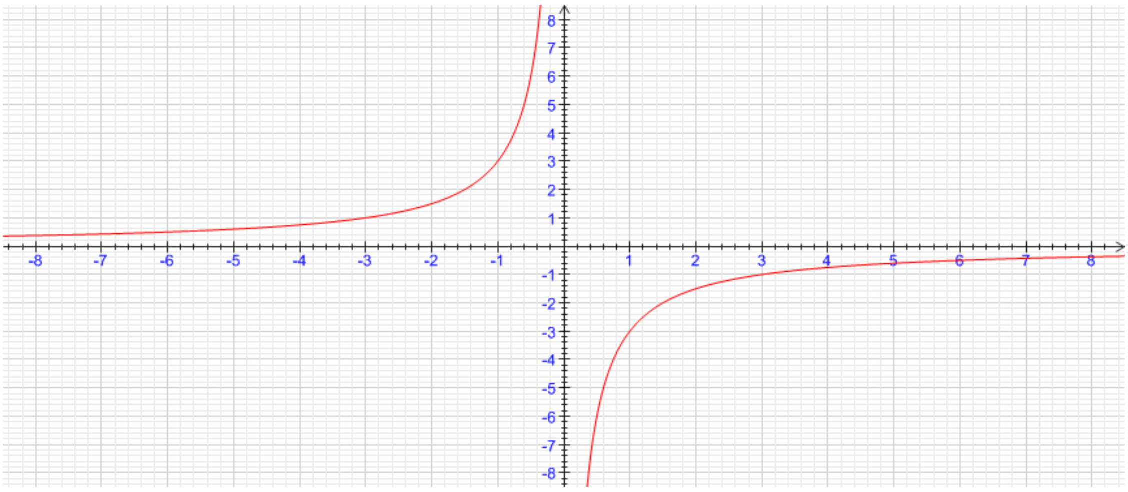
2) $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0$

$$x \mapsto \frac{a}{x}$$

$(exemple\ g(x) = \frac{3}{x}\ )$



$(exemple\ g(x) = \frac{-3}{x}\ )$

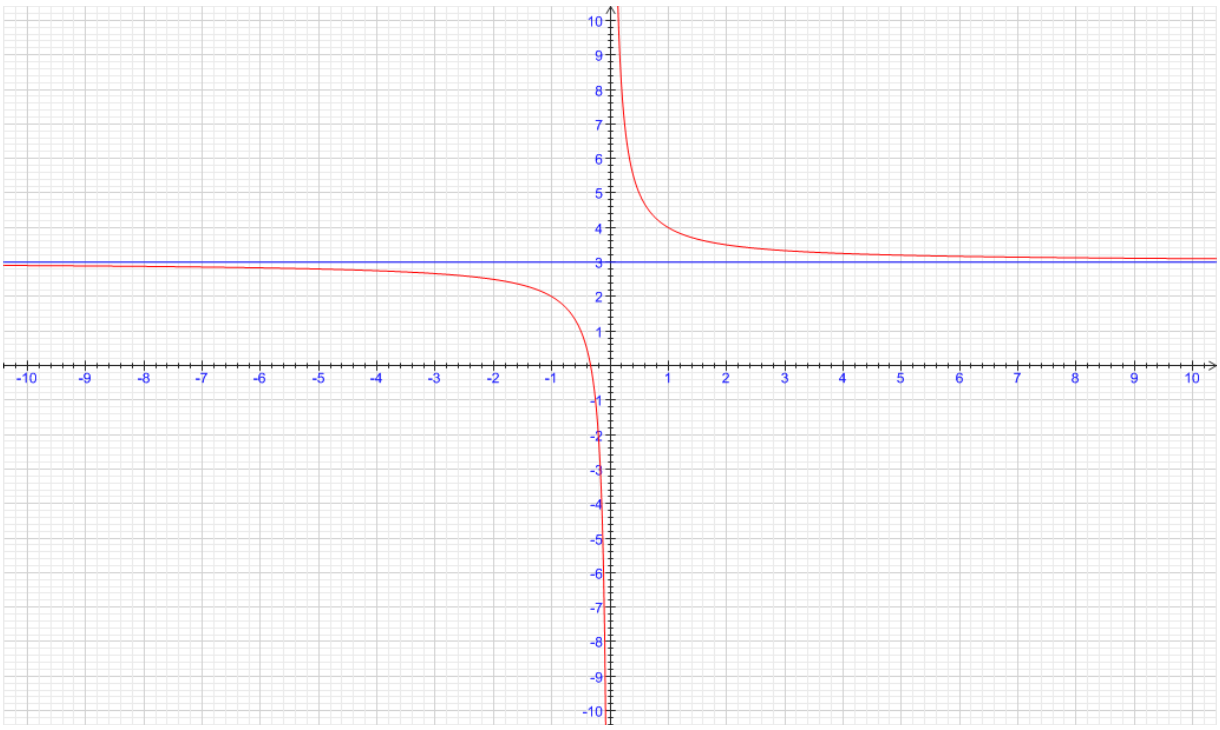


Les deux courbes des deux fonctions $\frac{3}{x}$ et $\frac{-3}{x}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

3) $h:\ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0$

$x \ \mapsto\ \frac{1}{x} + \beta$

$(exemple\ h(x) = \frac{1}{x} + 3\ )$



La courbe représentative de $h(x) = \frac{1}{x} + \beta$ est déduite de la courbe représentative de $f(x) = \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \beta\vec{j}$

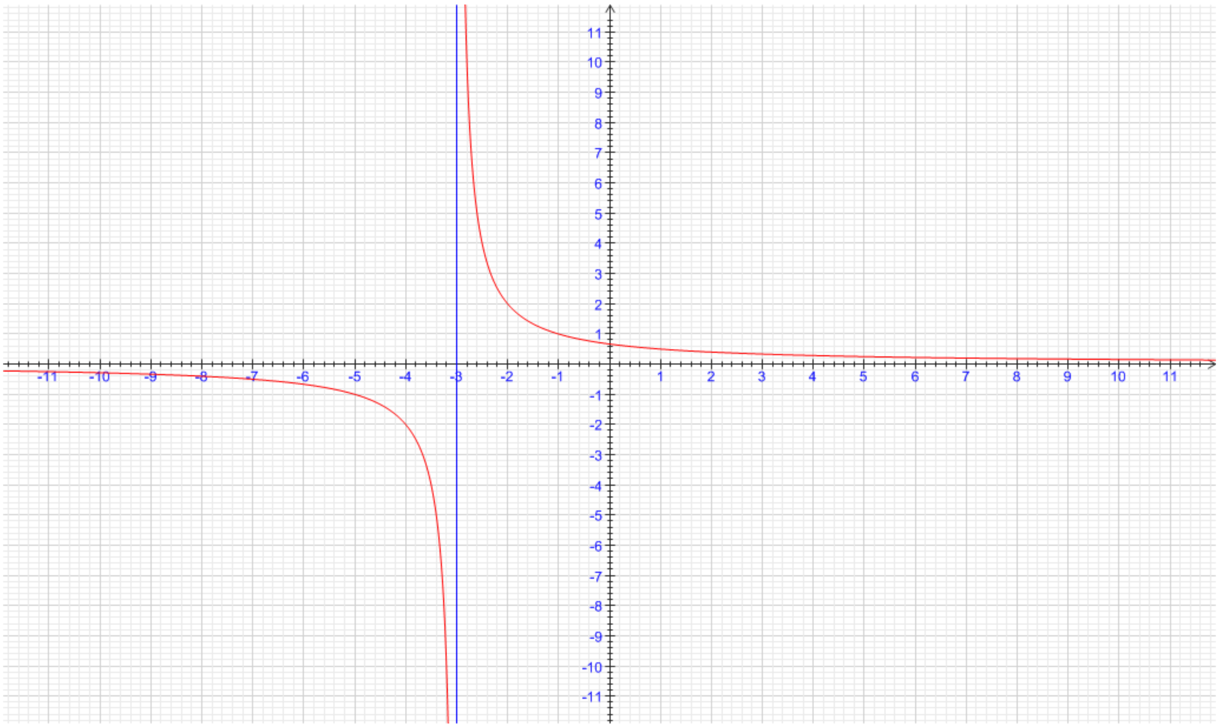
Les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$ sont des asymptotes de l'hyperbole

Le point $C(0, \beta)$est le centre de l'hyperbole

4) $k : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0$

$$x \mapsto \frac{a}{x+\alpha}$$

$(exemple\ k(x) = \frac{2}{x+3}\ )$



La fonction k est définie sur $]-\infty, -\alpha[\ \cup\ ]-\alpha, +\infty[$

La courbe représentative de $k(x) = \frac{a}{x+\alpha}$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \frac{a}{x}$ par une translation de vecteur $\vec{v} = -\alpha\vec{\imath}$

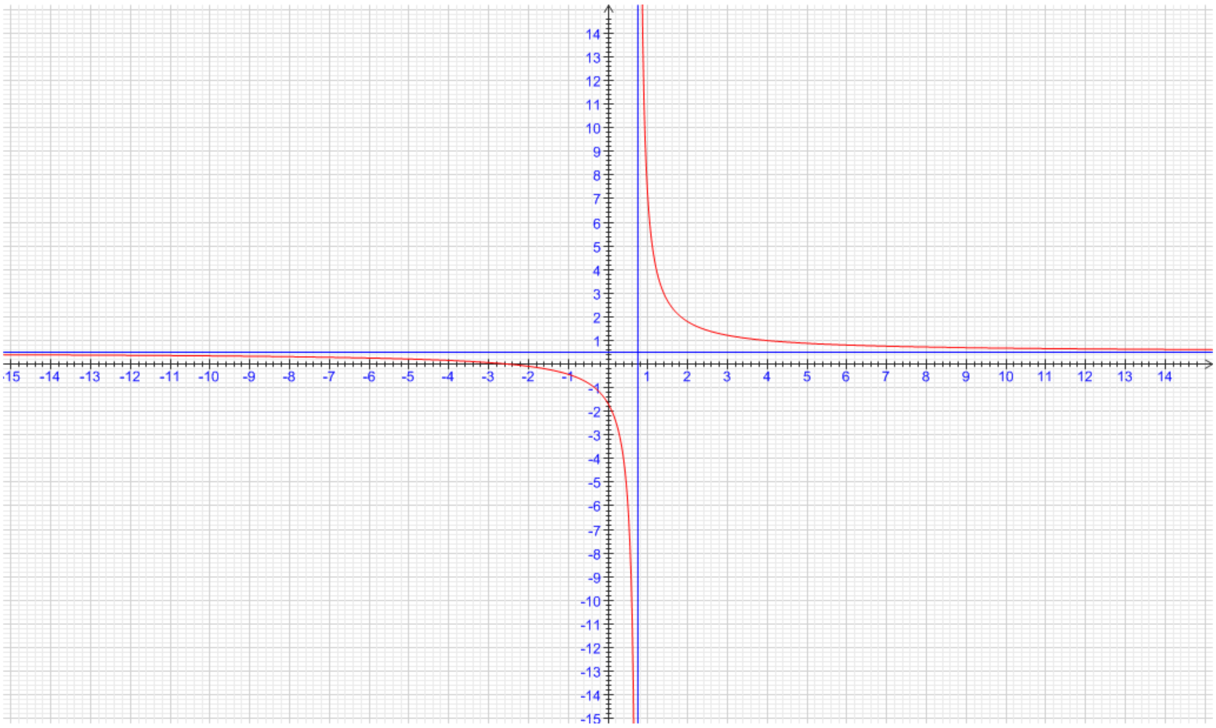
Les droites d'équations $x = 0\ et\ y = -\alpha$ sont les asymptotes de l'hyperbole

Le point $C(-\alpha, 0)$est le centre de l'hyperbole

5) $p : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ c \neq 0$

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

$(exemple\ p(x) = \frac{2x+5}{4x-3}\ )$



$p(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ peut s'écrire $p(x) = \frac{\alpha}{x+\beta} + \gamma$ où $\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}$; $\beta = \frac{d}{c}$ et $\gamma = \frac{a}{c}$

Donc la courbe représentative de $p(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est déduite de la courbe représentative de $g(x) = \frac{\alpha}{x}$ par une translation de vecteur $\vec{w} = -\beta\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath}$

Les droites d'équations $x = -\beta$ et $y = \gamma$ sont les asymptotes de l'hyperbole

Le point $C(-\beta, \gamma)$ est le centre de l'hyperbole.