Chapitre 7 Suites géométriques

I – Définition

On dit qu'une suite (U_n) est géométrique, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = q\, U_n$

Le réel q est appelé raison de cette suite

Remarque : Si a, b , c , d … sont des termes consécutifs d'une suite géométrique, on dit qu'ils sont en progression géométrique.

Exemple : Un client d'une banque paye chaque mois 0,2% de plus que le montant payé le mois précédant

on a $U_{n+1} = U_n + 0{,}2\%\ U_n$ soit $U_{n+1} = \frac{1002}{1000}\, U_n$

II – Terme général d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q \neq 0$

On a : $U_n = q^n\, U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$U_n = q^{n-p}\, U_p$ pour tout $n\ et\ p \in \mathbb{N}$

Démonstration :

(U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q \neq 0$

C

$U_{n-1} = q\, U_{n-2}$

. .

. .

. .

$U_1 = q\, U_0$

$U_n = q\, q\ .\ .\ .\ q\ U_0 = q^n U_0$

Cas particuliers :

- Si $q = 1$ on a $U_n = U_{n-1} = .\ .\ . = U_0$ c'est une suite constante
- Si $U_0 = 0$ on aura $U_n = q^n\, U_0 = q^n 0 = 0$ c'est une suite nulle
- Si $q = 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $q^n = 0$ donc $U_n = 0$ c'est une suite nulle

Exemple : Soit (U_n) une suite de nombres réels non nuls, telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\ \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$ .Donner le terme général de la suite (U_n)

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$

donc $U_n = q^n\, U_0 = \left(\sqrt{3}\right)^n \times 1 = \left(\sqrt{3}\right)^n$

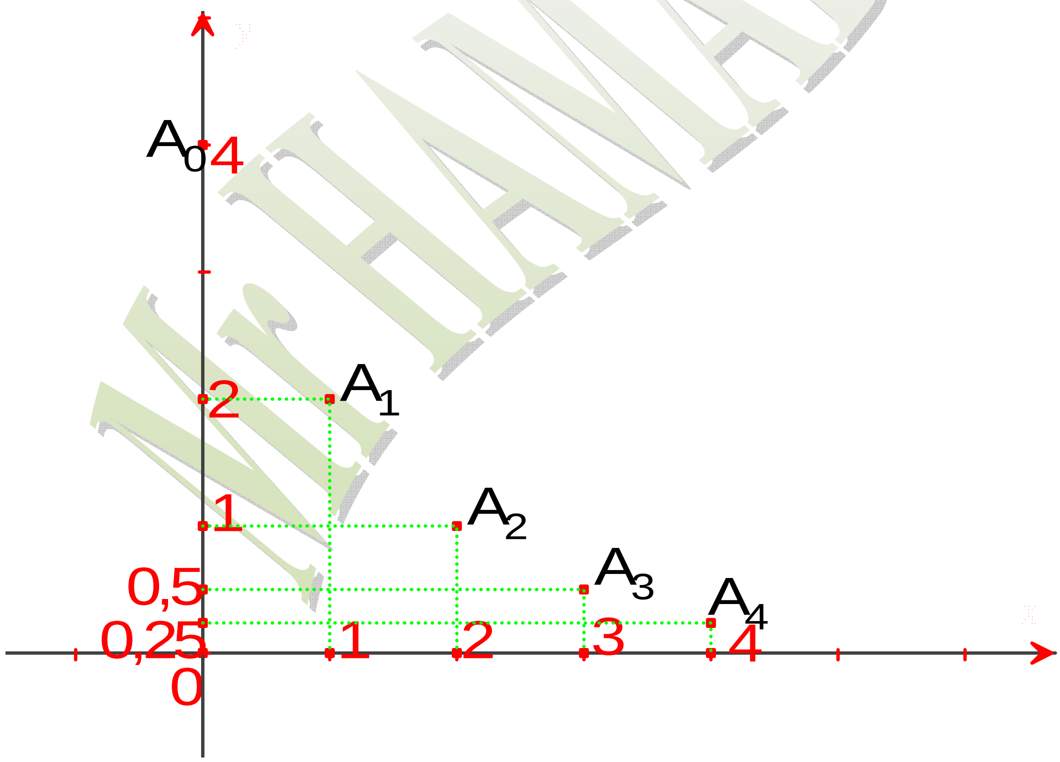
III – Représentation graphique

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, on considère la suite(U_n), suite géométrique de 1èr terme $U_0 = 4$ et de terme générale $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$

On a $U_0 = 4$, $U_1 = 2$, $U_2 = 1$, $U_3 = \frac{1}{2}$, $U_4 = \frac{1}{4}$ ....

On considère les points $A_0(0{,}4)$, $A_1(1{,}2)$, $A_2(2{,}1)$, $A_3\left(3,\frac{1}{2}\right)$, $A_3\left(4,\frac{1}{4}\right)$

Soit la représentation graphique de la suite géométrique (U_n) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$



IV – Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q (q$\neq 1$) est
$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$, où a est le premier terme de cette somme

Si $q = 1$ $alors\ S = na$

On a $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$, où q est un réel différent de 1 et n un entier naturel

Si $q = 1$ $on\ a\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = n + 1$

Exemple :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1èr terme $U_1 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

Calculer la somme des 8 premiers termes de cette suite

On a $S = U_1 + U_2 + \ldots + U_8 = (-5) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = (-5) \times \frac{2^8-1}{2^7} = -\frac{1275}{128}$

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901