Chapitre 6 Trigonométrie et mesure de grandeurs

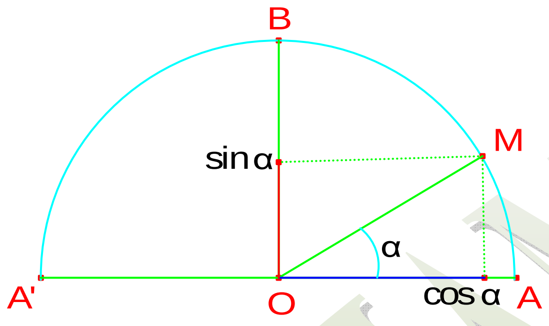
I – Définitions :

1 - Cosinus et Sinus

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan. Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et M l'unique point du demi cercle trigonométrique (C) tel que $\widehat{AOM} = \alpha$

On appelle cosinus du réel α, l'abscisse du point M et on le note $cos\ \alpha$

On appelle sinus du réel α, l'ordonné du point M et on le note $sin\ \alpha$



2- Tangente et Cotangente

* Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et tel que $\alpha > \frac{\pi}{2}$

On appelle tangente du réel α le réel noté $tan\ \alpha$ et défini par $tan\ \alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

* Soit α un réel appartenant à $]0, \pi[$

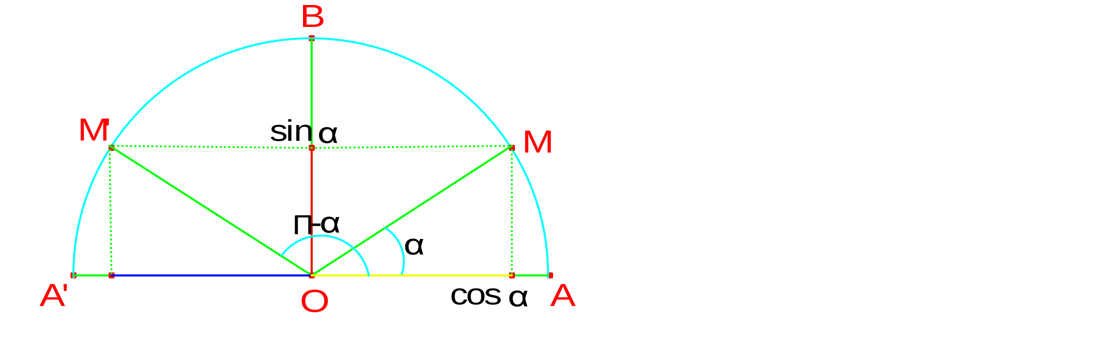
On appelle cotangente du réel α le réel noté $cot\ \alpha$ et défini par $cot\ \alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

II – Angles supplémentaires

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ on a $cos\ (\pi - \alpha) = -cos\alpha$ et $sin\ (\pi - \alpha) = sin\alpha$

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ on a $tan\ (\pi - \alpha) = -tan\alpha$

Pour tout α appartenant à $]0, \pi[$ on a $cot\ (\pi - \alpha) = -cot\alpha$



Explications :

On a M et M' sont symétriques par rapport à (OB) donc $\widehat{M'OA'} = \alpha$ d'où $\widehat{AOM'} = \pi - \alpha$

Or dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ M et M' ont des abscisses opposées et une même ordonnée ce qui entraine $cos\ (\pi - \alpha) = -cos\alpha$ et $sin\ (\pi - \alpha) = sin\alpha$

$tan\ (\pi - \alpha) = \frac{sin(\pi-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)} = \frac{sin\alpha}{-cos\alpha} = -tan\alpha$ avec $\alpha \in [0, \pi]\ et\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ car $cos\frac{\pi}{2} = 0$

$cot\ (\pi - \alpha) = \frac{cos(\pi-\alpha)}{sin(\pi-\alpha)} = \frac{-cos\alpha}{sin\alpha} = -cot\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[\ car\ sin0 = 0\ et\ sin\pi = 0$

Exemples :

Calculer sans utiliser la calculatrice

a) $cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{5\pi}{12} + cos\frac{7\pi}{12} + cos\frac{11\pi}{12}$
b) $sin\frac{\pi}{12} + sin\frac{5\pi}{12} - sin\frac{7\pi}{12} - sins\frac{11\pi}{12}$

Réponse :

On a $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi$ donc les angles sont supplémentaires alors on a :

a) $cos\frac{11\pi}{12} = -cos\frac{\pi}{12}$ et $cos\frac{7\pi}{12} = -cos\frac{5\pi}{12}$ d'où on obtient

$$cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{5\pi}{12} + cos\frac{7\pi}{12} + cos\frac{11\pi}{12} = cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{5\pi}{12} - cos\frac{5\pi}{12} - cos\frac{\pi}{12} = 0$$

a) $sin\frac{11\pi}{12} = sin\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12} = sin\frac{5\pi}{12}$ d'où on obtient

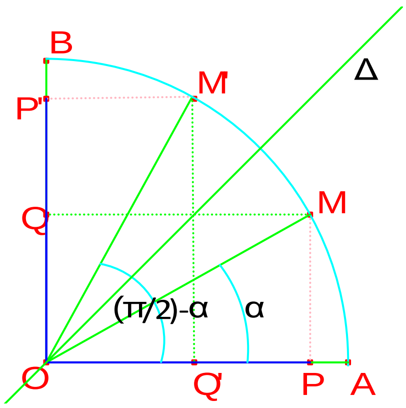
$$sin\frac{\pi}{12} + sin\frac{5\pi}{12} - sin\frac{7\pi}{12} - sins\frac{11\pi}{12} = sin\frac{\pi}{12} + sin\frac{5\pi}{12} - sin\frac{\pi}{12} - sins\frac{5\pi}{12} = 0$$

III – Angles complémentaires

Pour tout α appartenant à $[0,\frac{\pi}{2}]$ on a $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha$ et $sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha$

Pour tout α appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cot\alpha$

Pour tout α appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tan\alpha$



Explications :

On considère la droite Δ la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et les angles $\widehat{AOM}=\widehat{M'OB}=\alpha$ et on a les points A et B sont symétriques par rapport à Δ donc on tire que $\widehat{AOM'}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ et que M et M' sont symétriques par rapport à Δ

Soit P le projeté orthogonal de M sur (OA) et Q le projeté orthogonal de M sur (OB)

Soit P' le projeté orthogonal de M sur (OB) et Q' le projeté orthogonal de M sur (OA)

Donc P' et Q' sont respectivement les symétriques de P et Q par rapport à Δ

On obtient $\overline{OP}=\overline{OP'}$ et $\overline{OQ}=\overline{OQ'}$ or $\overline{OP}=cos\alpha$; $\overline{OP'}=sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $\overline{OQ}=sin\alpha$ et

$\overline{OQ'}=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc on obtient : $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha$ et $sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha$

$tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}=cot\alpha$; avec $\alpha\neq0$ car $cos\frac{\pi}{2}=0$

$cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=tan\alpha$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}\,sin\frac{\pi}{2}=0$

Exemples :

Sans utiliser la calculatrice calculer

$cos\frac{\pi}{12}+cos\frac{5\pi}{12}-sin\frac{\pi}{12}-sin\frac{5\pi}{12}$

On a : $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ donc les angles sont complémentaires alors

$cos\frac{5\pi}{12}=sin\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}=cos\frac{\pi}{12}$ donc

$cos\frac{\pi}{12}+cos\frac{5\pi}{12}-sin\frac{\pi}{12}-sin\frac{5\pi}{12}=cos\frac{\pi}{12}+sin\frac{\pi}{12}-sin\frac{\pi}{12}-cos\frac{\pi}{12}=0$

IV – Relations fondamentales

Pour tout α appartenant à $[0,\pi]$ on a $cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

Pour tout α appartenant à $[0,\pi]$ tel que $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ on a $1+tan^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}$

Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$ on a $1+cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Explications :

- $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ le repère orthonormé du plan, on a $OM=1$ et le point P étant le projeté orthogonal de M sur (OA) et Q le projeté orthogonal de M sur (OB) , on considère le triangle OMP rectangle en P d'après le théorème de Pythagore on a $OM^2=OP^2+MP^2$ or $MP^2=OQ^2$ et on a $\overline{OP}=cos\alpha$ et $\overline{OQ}=sin\alpha$, donc on obtient $cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ avec $\alpha\in[0,\pi]$
- $1+tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha}$ $avec$ $\alpha\in[0,\pi]$ et $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ car $cos\frac{\pi}{2}=0$
- $1+cot^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ $avec$ $\alpha\in]0,\pi[$ et $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ car $sin0=0$ et $sin\pi=0$

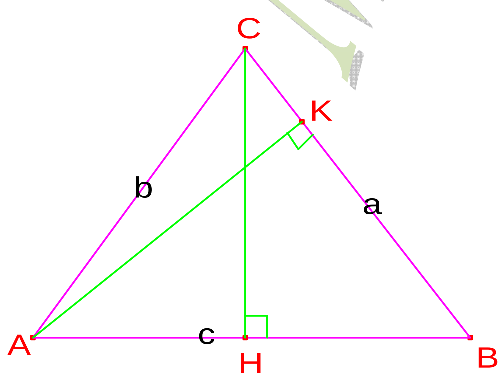
V – La loi du sinus et L'aire d'un triangle

1 - La loi du sinus

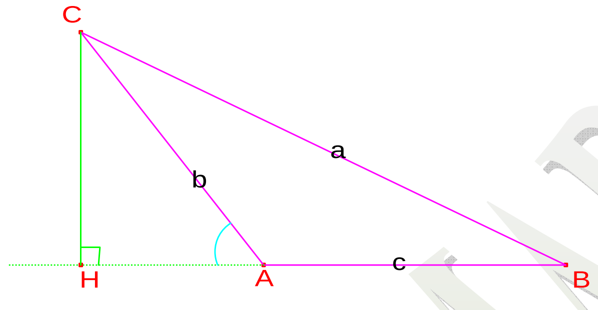
Soit ABC un triangle on pose $a=BC, b=AC$ et $c=AB$

On a $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

Démonstration :



- On considère le triangle ACH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :
  $\sin\hat{A} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$ on obtient $CH = b\ .\ \sin\hat{A}$ (1)
- On considère le triangle BCH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :
  $\sin\hat{B} = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{a}$ on obtient $CH = a\ .\ \sin\hat{B}$ (2)
- D'après (1) et (2) on obtient $b\ .\ \sin\hat{A} = a\ .\ \sin\hat{B}$ soit donc $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$
- Par un travail analogue que précédemment dans les tringles AKC et ABK on tire que
  $\frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$ d'où $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$



Etudier le cas où la hauteur CH est extérieure au triangle ABC (voir figure ci-dessus)

2 – Aire d'un triangle

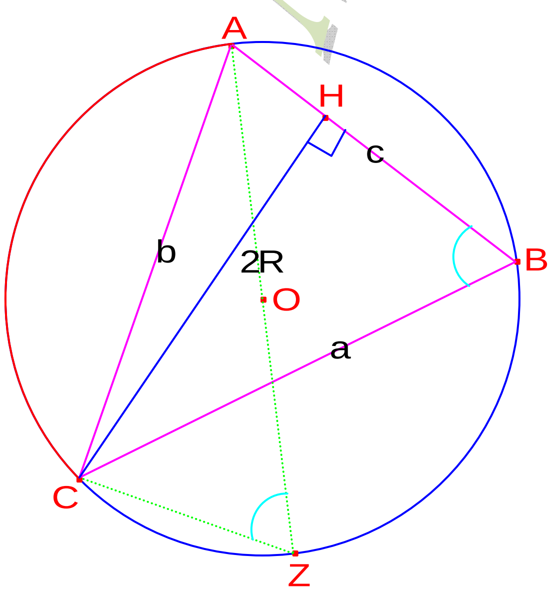
Soit ABC un triangle on pose $a = BC, b = AC\ et\ c = AB$

S désigne l'aire du triangle ABC et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

On a : $S = \frac{1}{2}ab\ sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\ sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\ sin\hat{B}$

$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$

Démonstration :



On a Z et B se trouvent sur le même arc donc $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AZC}$ interceptent le même arc $[\widehat{AC}]$ donc $\hat{B}$ et $\hat{Z}$ sont égaux, donc $\sin\hat{Z} = \sin\hat{B}$

Le triangle ACZ est rectangle en C car $[AZ]$ est un diamètre du cercle circonscrit donc $AZ = \frac{AC}{\sin\hat{Z}}$ c'est-à-dire $2R = \frac{b}{\sin\hat{B}}$

Par un raisonnement similaire, on obtient ainsi $2R = \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

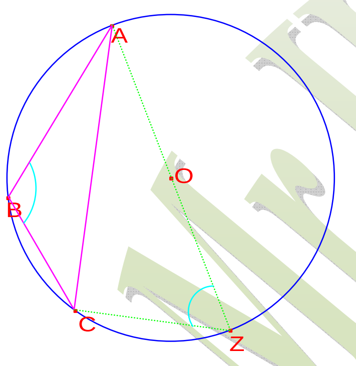
Donc $2R = \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

Or on l'aire d'un triangle est donnée par la formule suivante : $S = \frac{1}{2}\times(CH \times AB)$ ce qui donne $S = \frac{1}{2}a\,c\,.\,\sin\hat{B}$ car $CH = a\,.\,\sin\hat{B}$

Par un travail similaire on tire que $S = \frac{1}{2}a\,c\,.\,\sin\hat{B} = \frac{1}{2}b\,c\,.\,\sin\hat{A} = \frac{1}{2}a\,b\,.\,\sin\hat{C}$

Soit $2S = \frac{ab\,c\,.\,\sin\hat{B}}{b} = \frac{ab\,c\,.\,\sin\hat{A}}{a} = \frac{a\,b\,c.\,\sin\hat{C}}{c}$ ce qui entraine $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$

D'où le résultat $\frac{2S}{abc} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$



Etudier le cas de figure où le triangle ABC possède un angle obtus (remarque : $\hat{B}$ et $\hat{Z}$ sont supplémentaires)

<u>VI- Théorème d'EL-Kashi</u>

Soit ABC un triangle on pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$; on a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,.\cos\hat{B}$

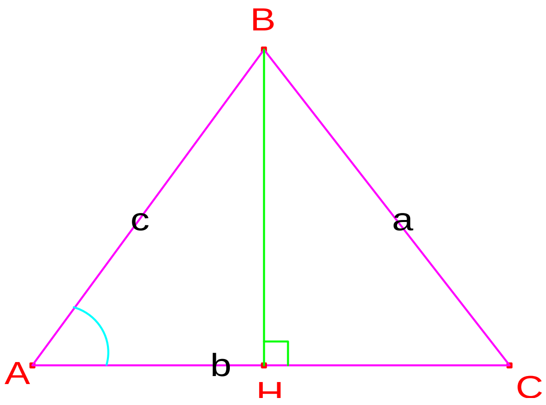
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\,.\cos\hat{C}$

Démonstration :

Le théorème de Pythagore dans le triangle BHC donne : $BC^2 = BH^2 + CH^2$

Le théorème de Pythagore dans le triangle BAH donne : $BH^2 = AB^2 - AH^2$

On obtient $BC^2 = AB^2 - AH^2 + CH^2$; or $HC = AC - AH$ ce qui donne



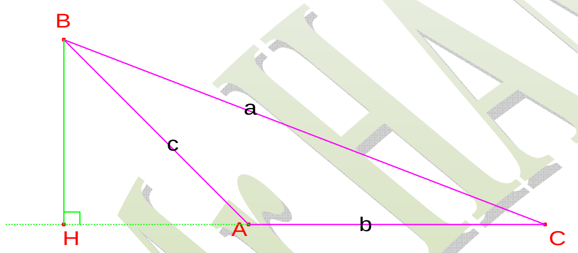
$HC^2 = (AC - AH)^2 = AC^2 + AH^2 - 2 \times AC \times AH$ ce qui donne pour BC^2

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AH$ Or $AH = AB \times \cos \hat{A}$ donc on obtient

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos \hat{A}$ ce qui donne finalement

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \,.\, \cos \hat{A}$

Par un raisonnement similaire on obtient les deux autres formules



Etudier le cas où la hauteur BH est extérieure au triangle ABC (voir figure ci-dessus)

VII – Triangles isométriques

1èr cas d'isométrie : Si deux triangles ont un coté compris entres deux angles respectivement égaux alors ils sont isométriques

2ème cas d'isométrie : Si deux triangles ont un angle compris entredeux coté respectivement égaux alors ils sont isométriques

3ème cas d'isométrie : Si deux triangles ont trois cotés respectivement égaux alors ils sont isométriques

Démonstration :

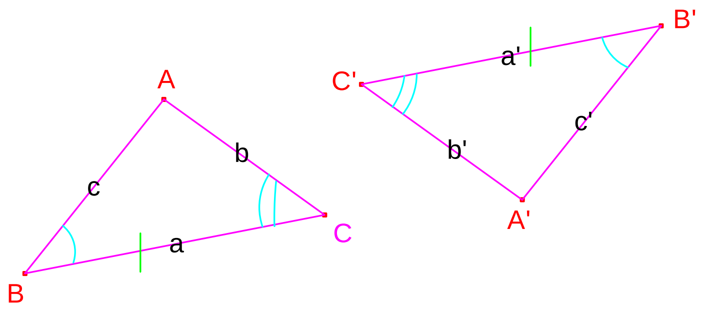
1èr cas d'isométrie :

Dans les triangles ABC et A'B'C' ont a $BC = B'C'$, $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$

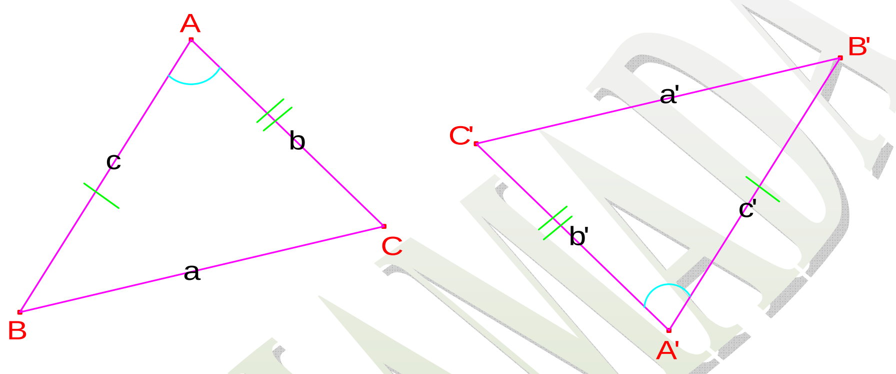
$\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$,On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à π donc on en déduit que $\hat{A} = \widehat{A'}$ ce qui donne $\sin \hat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \hat{C} = \sin \widehat{C'}$ et $\sin \hat{A} = \sin \widehat{A'}$

et comme $BC = B'C'$ c.à.d. a=a' on en déduit que $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a'}{\sin \widehat{A'}}$ soit donc deux à deux on a

$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{b'}{\sin \widehat{B'}}$ et $\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{c'}{\sin \widehat{C'}}$ ce qui entraine que $b = b'$ et $c = c'$ donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux Donc ils sont isométriques



2ème cas d'isométrie :



On a :

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \widehat{A'}$ donc $b = b', c = c', \sin \hat{A} = \sin \widehat{A'}$ et $\cos \hat{A} = \cos \widehat{A'}$

Donc on tire que $b^2 = (b')^2, c^2 = (c')^2 et\ 2bc \,.\cos \hat{A} = 2bc \,.\cos \widehat{A'}$

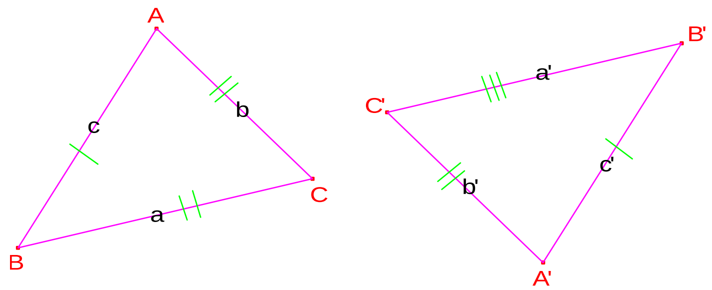
Donc d'après le théorème d'El-Kashi on obtient $a^2 = (a')^2$ soit $a = a'$ c.à.d. $BC = B'C'$

Et d'après la loi des sinus on obtient $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a'}{\sin \widehat{A'}}$ et $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{b'}{\sin \widehat{B'}}$ et $\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{c'}{\sin \widehat{C'}}$ ce qui donne $\sin \hat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \hat{C} = \sin \widehat{C'}$ donc $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$

donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux, donc ils sont isométriques

3ème cas d'isométrie :

On a : $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$



Donc $a = a', b = b' et\ c = c'$ or d'après le théorème d'El-Kashi on a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}\ \ et\ \ (a')^2 = (b')^2 + (c')^2 - 2b'c'\,.\cos\hat{A}$ ce qui donne que

$\cos\hat{A} = \cos\widehat{A'}\ \ donc\ \ \hat{A} = \widehat{A'}$ et par un raisonnement analogue on tire $\hat{B} = \widehat{B'}\ \ et\ \ \hat{C} = \widehat{C'}$

donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux, donc ils sont isométriques

VIII – Triangles semblables

- Soit ABC et A'B'C' deux triangles, on pose $BC = a\ , AB = c\ et\ AC = b$ et $B'C' = a'$, $A'B' = c'\ et\ A'C' = b'$
  on dit qu'ils sont semblables si et seulement si $\hat{A} = \widehat{A'}\ , \hat{B} = \widehat{B'}\ \ et\ \ \hat{C} = \widehat{C'}$
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles semblables alors on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (rapport de similitude des deux triangles)
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles tel que $\hat{A} = \widehat{A'}$ et $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors ABC et A'B'C' sont semblables
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles tel que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors ABC et A'B'C' sont semblables

Démonstration :

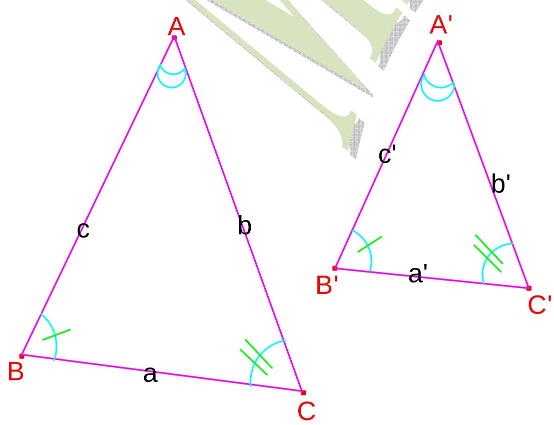


fig1

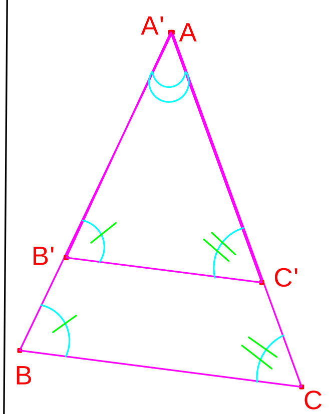


fig 2

ABC et A'B'C' sont semblables donc on a $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$ et tel qu'on suppose que $A'B' < AB$ (réduction) c.à.d. que $a' < a$, $b' < b$ et $c' < c$ (voir fig 1)

En mettant les deux triangles l'un sur l'autre (fig 2) les cotés [AB] et [A'B'] et [AC] et [A'C'] se superposent car on a $\hat{A} = \widehat{A'}$ et (BC) // (B'C') car $\hat{B} = \widehat{B'}$ deux angles correspondants donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ soit $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (rapport de similitude des deux triangles)

VIII – Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

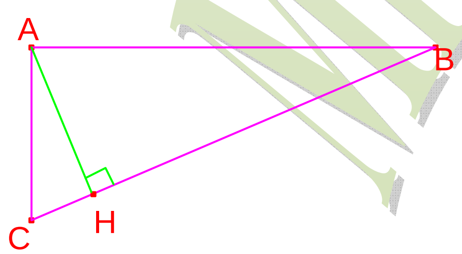
$AH.BC = AB.AC$

$AH^2 = HB.HC$

$AB^2 = BH.BC$

$AC^2 = CH.BC$

Démonstration :



- **Théorème de Pythagore** — Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- l'aire du triangle ABC est donnée de 2 relations égales : $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{AH\times BC}{2}$ soit donc $AB \times AC = AH \times BC$
- dans les triangles rectangles ABC, AHB et AHC d'après le théorème de Pythagore on a respectivement: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AB^2 = AH^2 + BH^2$, $AC^2 = AH^2 + AC^2$ on tire donc $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$ or $BC = BH + CH$ et $BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH.CH$ d'où le résultat $AH^2 = HB.HC$
- dans le triangle rectangle ABC d'après Pythagore on a : $AB^2 = BC^2 - AC^2$ or $BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH.CH$, $AC^2 = AH^2 + CH^2$ et $AH^2 = HB.HC$ on obtient donc $AB^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH.CH - AH^2 - CH^2 = BH^2 + BH \times CH = BH \times (BH + CH)$ soit $AB^2 = BH \times BC$

II - Lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901