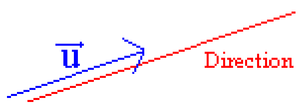
Chapitre 5 Calcul Vectoriel

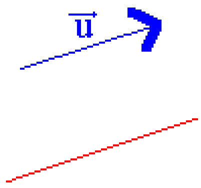
I – Généralités

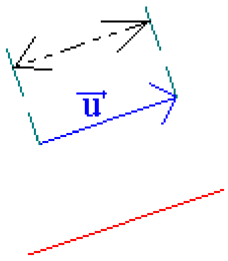
1 – Définition d'un vecteur

Un vecteur est caractérisé par :

Sa direction Son sens Sa norme





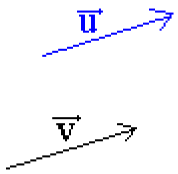


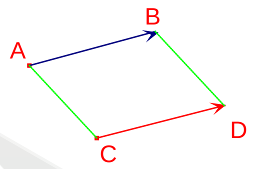
Remarque : De ce fait, un vecteur peut être déplacé n'importe où dans le plan, à condition que ses trois composantes, direction, sens et longueur ne changent pas.

2- Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u} et \vec{v}$ sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$alors, ABDC est un parallélogramme.





Exemples :

Soit ABCD un quadrilatère montrer que si on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme

ABCD un quadrilatère donc (AB) et (CD) ne sont pas confondus et comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que (AB) et (CD) sont parallèles de même on a AB = CD donc les segments $[AB]$ et $[CD]$sont parallèles et isométriques d'où ABDC est parallélogramme

II – Addition des vecteurs

1 – Définition

Soient $\vec{u} et \vec{v}$ et trois points A, B et C du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.Soit D le point $[BC]$ et $[AD]$

aient le même milieu.

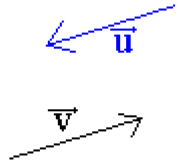
On appelle vecteur somme de $\vec{u} et \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, le vecteur $\vec{w}$ est noté $\vec{u} + \vec{v}$

2 – Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\overline{(u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

3 – L'opposé d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ s'appelle l'opposé de $\vec{u}$. Il est noté $-\vec{u}$.Ainsi on a $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$



Si $\overrightarrow{AB}$ un vecteur, on note $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$. En pratique $\overrightarrow{BA}$, est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$

Remarques : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ vecteur nul. (d'après Chasles)

Soustraire 2 vecteurs correspond à additionner l'un avec l'opposé du 2nd

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$

Exemples :

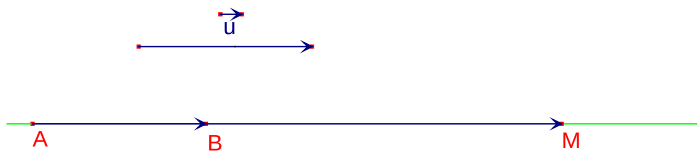
1) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, déterminer $-(\vec{u}+\vec{v})$; $-(-\vec{u})$
   $-(\vec{u}+\vec{v})=(-\vec{u})+(-\vec{v})$; $-(-\vec{u})=\vec{u}$
2) Simplifier les écritures suivantes : $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{u}$; $\vec{u}+\sqrt{3}\vec{u}$
   $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{4}{2}\vec{u}=\frac{5}{2}\vec{u}$; $\vec{u}+\sqrt{3}\vec{u}=(1+\sqrt{3})\vec{u}$

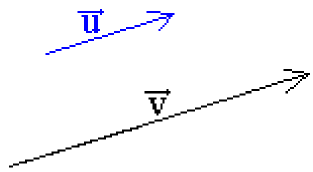
III – Multiplication d'un vecteur par un réel

1 – Multiplication d'un vecteur par un réel

a – Définition

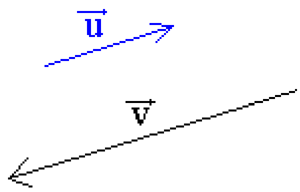
Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B un point tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. Soit α un réel et M le point de (AB) d'abscisse α dans le repère (A,B). On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α, le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AM}$ ($\vec{v}=\alpha.\vec{u}$)





Si α =0, $\vec{v}=0.\vec{u}=\vec{0}$

Si α >0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens, même direction mais de longueurs différentes.



Si α <0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, mais sont de sens opposés et n'ont pas même longueur.

b - Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et pour tous les réels α et β on a : 1. $\vec{u}$=$\vec{u}$; (-1). $\vec{u} = -\vec{u}$

$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$; $(\alpha+\beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$; $\alpha(\beta\,\vec{u}) = (\alpha.\beta)\vec{u}$

2 – Base de l'ensemble des vecteurs du plan

a – Base de l'ensemble des vecteurs du plan

On appelle base de l'ensemble des vecteurs du plan, tout couple $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.

Soit B =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{u}$ un vecteur. Le couple $(x\,,y)$de réels tel que $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + \ y\,\vec{\jmath}$ est appelé couple de composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

b – Vecteurs colinéaires

* Définition

Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dis colinéaires si et seulement si : il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha.\vec{u}$

* Propriétés

3 points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Si 2 droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{CD}$sont colinéaires.

Inversement, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

* Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs déterminant $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Exemples :

1) Simplifier les écritures suivantes : $\sqrt{5}(2\vec{u})$; $2(\vec{u}-3\vec{v}) - (5\vec{u}-6\vec{v})$
$\sqrt{5}(2\vec{u}) = 2\sqrt{5}\ \vec{u}$; $2(\vec{u}-3\vec{v}) - (5\vec{u}-6\vec{v}) = 2\vec{u} - 6\vec{v} - 5\vec{u} + 6\vec{v} = -3\vec{u}$
2) Soit B=$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, déterminer : $\vec{u}+\vec{v}$; $-\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $\sqrt{3}\vec{u}$
$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+\frac{1}{2}\\-\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $-\vec{v} = -\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$;
$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-\frac{1}{2}\\-\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\sqrt{3}\vec{u} = \sqrt{3}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}$

3) Préciser si les vecteurs $\vec{u} et \vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$

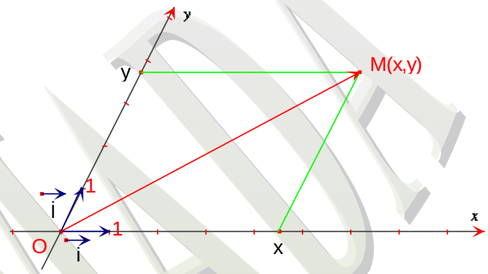
$\begin{vmatrix}3 & \sqrt{3}\\-\sqrt{3} & 1\end{vmatrix} = 3x(-1) - \sqrt{3}(-\sqrt{3}) = -3+3 = 0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\begin{vmatrix}3 & \sqrt{3}\\-\sqrt{2} & 2\end{vmatrix} = 3x2 - \sqrt{3}(-\sqrt{2}) = 6+\sqrt{6} \neq 0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

IV – Repère cartésien du plan

Soit O un point du plan et B $=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé repère cartésien du plan.



Soit M un point du plan. Le couple de coordonnées du point M dans le repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est l'unique couple $(x\,,y)$de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

Le réel x est l'abscisse du point M et le réel y est l'ordonnée du point M, dans le repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $M(x\,,y)$.

Le point O est appelé origine du repère ; $(O,\vec{\imath})$ est appelé l'axe des abscisses ; $(O,\vec{\jmath})$ est appelé l'axe des ordonnées .

Exemples :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit A(1 , 2) et B(-3 , 4) déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (-3-1)\vec{\imath} + (4-1)\vec{\jmath} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{3}$

V – Norme d'un vecteur – Vecteurs orthogonaux

1 – Norme d'un vecteur

a - Définition

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur et soit B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ et qui est égal à la distance AB.

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ou normé.

b – Propriétés

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ et pour tout réel α on a:

$\|\vec{u}\| = 0$ *équivaut* à $\vec{u} = \vec{0}$; $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$; $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

c - Distance de deux points – Expression de la norme d'un vecteur

Si dans une base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ *on a* $\vec{u}\binom{x}{y}$ *alors* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Si dans un repère cartésien $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ on a $A(x,y)\ et\ B(x',y')$ alors
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$

2 – Vecteurs orthogonaux

a -Définition

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soient B et C les points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si les droites $(AB)et\ (AC)$ sont perpendiculaires

Par convention le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on lit le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$

b – Base orthonormée

On dit qu'une base B =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est une base orthonormée, si les vecteurs $\vec{\imath}\ et \vec{\jmath}$ sont orthogonaux et sont normés. Ainsi (B =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est une base orthonormée) si et seulement si ($\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$)

On dit que le repère $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé du plan si la base B =$(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est une base orthonormé de l'ensemble des vecteurs du plan.

c – Condition analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs

Soit $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u}\binom{x}{y}\ et\ \vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

Les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont orthogonaux : ($\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut $xx' + yy' = 0$)

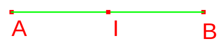
Exemples :

1) Calculer la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1} = 1$
2) Soient les deux points A(-2 ,-4) et B(3 , 5) Calculer la distance AB
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{((3-(-2)\,)^2+(5-(-4))^2} = \sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$
3) soient $\vec{u}\binom{3}{-1}\ et\ \vec{v}\binom{2}{6}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ déterminer si Les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont orthogonaux
on a $3x2 + (-1)x6 = 6 + (-6) = 0$ donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont orthogonaux

VI – Vecteurs et configurations géométriques

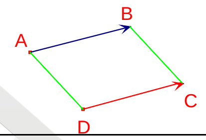
1 – Milieu d'un segment

Si $[AB]$ est un segment et le point I son milieu alors on a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



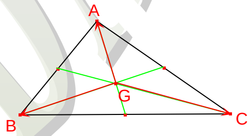
2 – Parallélogramme

Soient A,B,C et D 4 points non alignés du plan. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



3 – Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, le point G du plan est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



4 – Théorème de la projection

Soient deux droites (D) et(D') non parallèles et les points A, B et C de (D), leurs projetés sur (D') les points A', B' et C' tel que (AA') //(BB') //(CC') et α un réel non nul. Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\,\overrightarrow{A'C'}$