Chapitre 1 Calcul dans $\mathbb{R}$

I – Les ensembles de Nombres

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{D}$: l'ensemble des décimaux ; $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels

Exemples :

1) $2\,;\frac{8}{2}\,;\sqrt{16} \in \mathbb{N}$ / $-2\,;7\,;-\frac{18}{3} \in \mathbb{Z}$ / $2{,}3\,;-4{,}7\,;\frac{5}{40}\,;\frac{132}{10^3}\,;-\frac{43}{10^4}\,;\frac{\sqrt{\pi^2}}{\pi} \in \mathbb{D}$

$0\,;-7\,;5{,}89\,;-4{,}54\,;\frac{56}{67}\,;-\frac{67}{\sqrt{81}}\,;\frac{43}{14^3} \in \mathbb{Q}$ / $12\,;-4\,;\frac{5}{30}\,;\pi\,;-\sqrt{23}\,;\frac{\sqrt{5}}{\pi^3} \in \mathbb{R}$

2) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ / $\{2\,;2{,}4\,;-\frac{5}{40}\,;\sqrt{23}\} \subset \mathbb{R}$ / $\{3^2\,;\frac{\sqrt{16}}{5}\,;\pi\} \not\subset \mathbb{Q}$

II – Proportionnalité et Pourcentage

1 - Proportionnalité

On dit qu'un tableau est un tableau de proportionnalité si le rapport de chaque nombre de la 2ième ligne par celui de la première est toujours le même. Ce rapport s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

2	5	3	10
6	15	9	30

Le Coefficient de proportionnalité est **3** $= \frac{15}{5} = \frac{9}{3}$ …….

On dit que 2 variables d'un tableau sont inversement proportionnels si leurs produit est un réel fixe non nul

Exemple :

2	4	$\frac{3}{4}$	1
8	4	$\frac{64}{3}$	16

Le Coefficient de proportionnalité est **16** = 2x8 = $\frac{3}{4} x \frac{64}{3}$

2 – Pourcentage

Un fromage contient 45% de matière grasse. Sachant que ce fromage pèse 300 g, quelle est la masse de matière grasse contenue dans ce fromage.

Dire qu'il y a 45% de matière grasse signifie que dans 100g de fromage, il y a 45 g de matière grasse.

masse de matière grasse (en g)	45	
masse totale du fromage (en g)	100	300

Dans 300g de fromage, il y a 135g de matière grasse.

III – Les identités remarquables

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901

Soit , b et c trois réels, on a les identités remarquables suivantes :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2) + 6abc$

Exemples :

1) $\left(2 + a\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2x2xa\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}^2 = 4 + 4a\sqrt{3} + 3a^2$
2) $\left(1 - \sqrt{5}\right)^3 = 1^3 - 3x1^2x\sqrt{5} + 3x1x\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} = 16 - 8\sqrt{5}$

IV – Comparaison de réels – Encadrement

1 – Ordre et comparaison

Pour tout réel a , b , c et d on a :

$a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

$a < b$ (si $c > 0$ alors $a.c < b.c$) et (si $c < 0$ alors $a.c > b.c$)

$a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$

Si a, b, c et d sont des réels positifs et tel qu'on a $a < b$ et $c < d$ alors $a.c < b.d$

$a < b$ équivaut à $b - a$ est strictement positif. $(0 < b - a)$

$a > b$ équivaut à $b - a$ est strictement négatif $(0 < b - a)$

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

2 – Comparaison de a ; a^2 ; $\sqrt{a}$

Soit a un réel

Si $a \geq 1$; alors on a : $a^2 \geq a$; $a \geq \sqrt{a}$ / Si $0 \leq a \leq 1$; alors on a : $a^2 \leq a$; $a \leq \sqrt{a}$

Si $a \leq -1$; alors on a : $a^2 \geq a$ / Si $-1 \leq a \leq 0$ alors on a : $a^2 \leq a$

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901

3 – Comparaison de a et $\frac{1}{a}$

Soit a un réel non nul

Si $a \geq 1$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$ / Si $a \leq -1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$

Si $0 < a \leq 1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$ / Si $-1 \leq a < 0$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$

4 – Encadrement, Intervalle de $\mathbb{R}$

Soient a, b et x trois réels

$Si\ a < x < b\ alors\ on\ dit\ que\ x\ appartient$ à $l'intervalle\ ouvert\ ]\,a\,;\,b\,[\quad x \in]\,a\,;\,b\,[$

$Si\ a \leq x \leq b\ alors\ on\ dit\ que\ x\ appartient$ à $l'intervalle\ fermé\ [\,a\,;\,b\,].x \in [\,a\,;\,b\,]$.

$Si\ x > a\ alors\ dit\ que\ x\ appartient$ à $l'intervalle\ ]\,a\,;+\infty\,[$.

$Si\ x \leq a\ alors\ dit\ que\ x\ appartient$ à $l'intervalle\ ]-\infty\,;\,a\,]$.

$L'ensemble\ des\ réels\ positifs\ est\ l'intervalle\ [\,0\,;+\infty\,[, on\ le\ note\ \mathbb{R}_+$.

$L'ensemble\ des\ réels\ strictements\ positifs\ est\ l'intervalle\ ]\,0\,;+\infty\,[, on\ le\ note\ \mathbb{R}_+^*$.

Exemples :

1) Comparons $\sqrt{2}-1$ et $(\sqrt{2}-1)^2$
Méthode 1 : on a $1 < 2$ et $\sqrt{2} < 2$ on tire$1-1 < \sqrt{2}-1 < 2-1$ donc $0< \sqrt{2}-1 < 1$
On conclu que $\sqrt{2}-1 > (\sqrt{2}-1)^2$
Méthode 2 : on utilise la différence
$\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}-1-2+2\sqrt{2}-1 = 3\sqrt{2}-4$, on étudie le signe de $3\sqrt{2}-4$
$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $4^2 = 16$ or $18 > 16$ $donc$ $3\sqrt{2} > 4$ d'où $3\sqrt{2}-4 > 0$ on conclu que
$\sqrt{2}-1 > (\sqrt{2}-1)^2$

2) Soit x un réel quelconque comparons $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$
Méthode 1 : x réel quelconque donc $x^2 \geq 0$ alors $1+x^2 \geq 1$ alors$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ donc on conclu que $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x^2}$
Méthode 2 : on compare les carrées des 2 expressions
On a $x^2 \geq 0$ alors $1+x^2 \geq 1$ et $donc$ $\frac{1}{1+x^2} > 0$
$\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}^2 = \frac{1}{1+x^2}$ et $(\frac{1}{1+x^2})^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ alors $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2-(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{x^2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3} = \frac{x^2}{1+x^2}$

$$or\ x^2 \geq 0\ et 1+\ x^2 > 0\ donc\ \frac{1}{1+\ x^2} > 0\ et\ par\ la\ suite\ \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0\ on\ conclu$$

$\frac{1}{1+x^2} \geq (\frac{1}{1+x^2})^2$ donc $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \sqrt{(\frac{1}{1+x^2})^2}$ soit alors $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \left|\frac{1}{1+x^2}\right|$ donc $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x^2}$

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901

3) $\frac{23}{21} > \frac{86}{88}$ car $\frac{23}{21} > 1$ et $\frac{86}{88} < 1$

4) Encadrement d'un réel :
$Soit\ a\ un\ réel\ telque\ -2 \leq a \leq 3$ déterminer un encadrement de $-3a + 5$

-3 est un réel négatif donc $(-3)x(-2) \geq (-3)a \geq 3x(-3)$ soit $-9 \leq -3a \leq 6$
et par la suite $-9 + 5 \leq -3a + 5 \leq 6 + 5$ soit $-4 \leq -3a + 5 \leq 11$

5) Soit x un réel strictement positif montrer l'inégalité suivante $x + \frac{1}{x} \geq 2$
On a $x > 0\ alors\ (x-1)^2 \geq 0$ alors x^2-$2x$+1≥ 0 on tire x^2+1$\geq 2x$ et comme $\frac{1}{x} > 0$ alors
$\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x}$ donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$

6) Moyenne Arithmétique, Moyenne Géométrique
Soit a, b et c trois réels positifs montrer :
a / $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$: on a $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donc $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ on tire $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et en multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{2}$ on obtient $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
b/ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ d'après le cas précédant on a $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ donc on peut écrire $\frac{a+b}{2} x \frac{b+c}{2} x \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab}\, x\, \sqrt{bc}\, x\, \sqrt{ac}$ donc $\frac{1}{8} x (a+b)(b+c)(c+a) \geq \sqrt{a}^2\, x\, \sqrt{b}^2\, x\, \sqrt{c}^2$
soit alors $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8|a||b||c|$ donc $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

V – Les Radicaux

Soit a un réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a le seul nombre positif dont le carré est égal à a. La racine carrée de a est notée $\sqrt{a}$

Si a est positif alors on a $\sqrt{a} = a$ Si a est négatif alors on a $\sqrt{a^2} = |a|$ Tu Remarque bien

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs

$\sqrt{x} . \sqrt{y} = \sqrt{xy}$; $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

Exemples :

1) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$; $\sqrt{5} . \sqrt{125} = \sqrt{625} = 25$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

2) $simplifier\ l'expressionsuivante :\ \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ on utilise le conjugué de $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{18}-\sqrt{6}}{6-2} = \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) Déterminer le réel a dans l'expression suivante : $\sqrt{7 + \sqrt{a}} = 3$
On a $\left(\sqrt{(7 + \sqrt{a})}\right)^2 = 3^2$ donc $7 + \sqrt{a} = 9$ alors $\sqrt{a} = 2$ donc $\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2^2$ on tire que $a = 4$

4) Formule de Héron
L'aire A dont on connait les trois cotés a, b et c est donnée par la formule suivante

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; où p désigne le demi-périmètre du triangle

5) Développement – Factorisation

a / Développer et réduire

A= $\left(a\sqrt{5}-b\right)\left(a+b\sqrt{5}\right) = a^2\sqrt{5}+5ab-ab-b^2\sqrt{5} = a^2\sqrt{5}+4ab-b^2\sqrt{5}$

b / Factoriser

$B = (2x+3y)^3-(2x-3y)^3$

$= [(2x+3y)-(2x-3y)][(2x+3y)^2+(2x+3y)(2x-3y)+(2x-3y)^2]$

$= 6y[4x^2+12xy+9y^2+4x^2-9y^2+4x^2-12xy+9y^2]$

$= 6y[12x^2+9y^2] = 18y[4x^2+3y^2]$

VI – Valeur absolue

Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x (notée |x|) est définie par :

$|x| = x, si\ x > 0$; $|x| = -x, si\ x < 0$; $|x| = 0, si\ x = 0$

Pour tout nombre réel x et y on a :

$|x|.|y| = |x.y|$; $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$ pour $y \neq 0$; $|x+y| \leq |x|+|y|$; $|x-y| \geq ||x|-|y||$

$|x| \leq a\ signifie\ -a \leq x \leq a$; $|x| \geq a\ signifie\ x \leq -a\ et\ x \geq a$ où a est strictement positif

Exemples :

1) Ecrire sans symbole | |

$\left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2\ car\ 5 > 4$; $\left|1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\ car\ \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\ et \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}\ or\ 3 < 4\ donc\ \sqrt{3} < 2\ donc\ 2\sqrt{3} < 4\ donc\ 4+2\sqrt{3} < 8\ alors\ 1+\sqrt{3} < 2\sqrt{2}\ donc\ 1+\sqrt{3}-2\sqrt{2} < 0$

2) Déterminer le réel x

$|x+2| = 3\ signifie\ x+2 = 3\ ou\ x+2 = -3\ donc\ on\ tire\ x = 1\ ou\ x = -5$

VII – Ordre de grandeur - Valeurs approchées

1 - Valeurs approchées

$Soit\ n\ un\ entier. On\ dit\ que\ le\ nombre\ décimal\ a\ est\ une\ valeur\ approchée$ à 10^n $près\ du\ réel$
$-a| \leq 10^n$

$Si\ a < b\ on\ dit\ que\ a\ est\ une\ valeur\ approchée\ de\ b$ à 10^n $près\ par\ défaut$

$Si\ a > b\ on\ dit\ que\ a\ est\ une\ valeur\ approchée\ de\ b$ à 10^n $près\ par\ excès$

2 – Ecriture scientifique et ordre de grandeur

$Si\ a.10^n\ est\ l'ecriture\ scientifique\ d'unnombre, l'ordrede\ grandeur\ de\ ce\ nombre\ est$

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901

$b.10^n$, où b est l'arrondit de a à l'unité

Exemples :

1) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut
   $10{,}419484076 \cong 10{,}41948$; $\frac{2006}{2005} \cong 1{,}00049$
2) $123\ 423\ 456$ s'écrit $1{,}234 \times 10^8$ en notation scientifique et son ordre de grandeur est 1×10^8 / $0{,}000\ 123$ s'écrit $1{,}23 \times 10^{-4}$ et son ordre de grandeur est 1×10^{-4}

yosri_prof@yahoo.fr / Tel :23 356 901