Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo	Chapitre : Homothéties	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences

I. Homothéties

1) Pour démarrer :

Activité :

ABC un triangle, les points A', B' et C' les milieux respectives des segments [BC], [AC] et [AB] et soit O le barycentre des points (A, 1), (B ,1) et (C, 1)

a) *Que représente le point O pour le triangle ABC ?*

b) *Exprimer* $\overrightarrow{OA'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}$ *en fonctin de* $\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OC'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OC}$.

c) *Soit à tout point M du plan associe un point M' tel que O est le barycentre de (M,-1) et (M',2) ; Exprimer* $\overrightarrow{OM'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OM}$

Remarque :

O est un point du plan, on dit que M' est l'image de M par l'application f définie par :

$f : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$

On dit que A', B' et C' sont les images respectives des points A , B et C par cette application f

Cette application est appelé Homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{1}{2}$

2) Homothéties

Définition :

Soit O un point du plan et k un réel non nul
On appelle homothétie de centre O et de rapport k, notée $h_{(O,k)}$,
l'application du plan dans lui même qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Conséquence :

- *Un point et son image sont alignés avec le centre de l'homothétie.*
- $h_{(O,k)}(O) = O$. *on dit que O est un point invariant par h.*
- $h_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$ $(k \neq 0)$

  Tout point du plan admet un unique antécédent par une homothétie

Remarque :

- *Pour* $k \neq 1$ *, le seul point invariant par* $h_{(O,k)}$ *est le point O.*
- *Si* $k = 1$ *alors l'homothétie considérée est l'application identique.*
- *Si* $k = -1$ *alors l'homothétie considérée est la symétrie de centre O.*

3) Construction de l'image d'un point par une homothétie :

Activité :

Soient O et A deux points distincts. Construire le point A' tel que

a) $A' = h_{(O,3)}(A)$; b) $A' = h_{(O,-2)}(A)$; c) $A' = h_{(O,\frac{1}{2})}(A)$

II. Propriétés de l'homothétie :

1) Propriété fondamentale :

Activité :

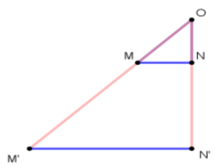
Soit h une homothétie de centre O et de rapport k et soient M et N deux points distincts du plan.

On note M'=h(M) et N'=h(N) ; Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{MN}$.

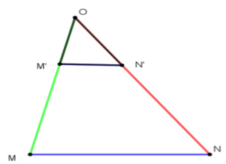
Propriété fondamentale :

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.
Soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images respectives par h
On a :

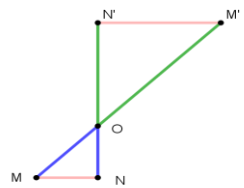
$$\left.\begin{array}{l} h_{(O,k)}(M) = M' \\ h_{(O,k)}(N) = N' \end{array}\right\} \text{ alors : } \overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$$



$k > 1$



$0 < k < 1$



$k < 0$

Conséquence :

Si M' et N' sont les images respectives de deux points distincts M et N par une homothétie de rapport k alors :

- La droite (MN) est parallèle à la droite $(M'N')$.
- $M'N' = |k|.MN$

2) Conservation de l'alignement :

Activité :

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

Soient A, B et C trois points alignés et A', B' et C' leurs images respectives par h

Montrer que A', B' et C' sont alignés ?

Propriété :

L'homothétie conserve l'alignement

Si A, B et C sont alignés alors leurs images respectives A', B' et C' par une homothétie sont alignés.

3) Images : d'une droite, d'un segment et d'un cercle:

Activité :

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

Soient A et B deux points distincts et A' et B' leurs images respectives par h

a) Soit $M \in (AB)$ et M' l'image de M par h. Montrer que $M' \in (A'B')$.

b) Si $N' \in (A'B')$ et N son antécédent par h. Montrer que $N \in (AB)$.

c) Que peut on déduire pour l'image du segment $[AB]$ par $t_{\vec{u}}$?

d) Soit $\varphi_{(A\ ,\ AB)}$ le cercle de centre A et de rayon AB. Montrer que l'image de φ par h est le cercle $\varphi'_{(A'\ ,\ |k|.AB)}$?

Théorème :

A et B deux points distincts A' et B' leurs images respectives par l'homothétie de centre O et de rapport k :

- L'image d'une droite (AB) par $h_{(O,k)}$ est la droite $(A'B')$ qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ par $h_{(O,k)}$ est le segment $[A'B']$.
- L'image d'un cercle $\varphi_{(I\ ,\mathcal{R})}$ par $h_{(O,k)}$ est le cercle $\varphi'_{(I',|k|\mathcal{R})}$ tel que $I' = h_{(O,k)}(I)$

Remarque :

Si (AB) passe par O alors l'image de (AB) est (AB) par $h_{(O,k)}$

4) Conservation : de milieu, de barycentre, de parallélisme, d'orthogonalité, des angles et de tangente.

Activité 1:

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 4)$ et I le milieu de $[AB]$.

h est l'homothétie de centre O et de rapport k.

On pose $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $G' = h(G)$ et $I' = h(I)$

a) Montrer que G' est le barycentre des points pondérés $(A', 1)$ et $(B', 4)$.

b) Montrer que I' est le milieu de $[A'B']$.

Activité 2:

Soient D et Δ deux droites et D' et Δ' leurs images par h l'homothétie de centre O et de rapport k. Que peut-t-on dire des droites D' et Δ' si :

a) D et Δ sont parallèles.

b) D et Δ sont perpendiculaires.

Activité 3:

1) Soit $B\hat{A}C$ un angle et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On pose $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$. Montrer que $B'\widehat{A'}C' = B\hat{A}C$?

2) Soit Δ une droite tangente a un cercle $\varphi_{(I,\ r)}$ en un point M. h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On pose $\Delta' = h(\Delta)$, $\varphi' = h(\varphi)$, $M' = h(M)$ et $I' = h(I)$. Montrer que la droite Δ' est tangente au cercle $\varphi'_{(I',|k|\ r)}$?

Propriétés:

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan et A', B', C' et D' leurs images respectives par une homothétie de centre O et de rapport k.

L'homothétie conserve:

- **Le barycentre :** Si C est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) alors C' est le barycentre des points pondérés (A', a) et (B', b).
- **Le milieu :** Si C est le milieu du $[AB]$ alors C' est le milieu de $[A'B']$.
- **Le parallélisme :** Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$
- **L'orthogonalité :** Si $(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$
- **Les angles :** $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$
- **Le contact :** Si Δ une droite tangente a un cercle φ alors leurs images Δ' et φ' sont tangentes.