Institut : Mahmoud Al-Messadi Bardo	Chapitre : Suites Gémétriques	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences 2 ème technologie de l'infomatique

I. Caractéristique d'une suite géométrique :

Définition :

On dit qu'une suite (U_n) est une suite géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = q.U_n$
Le réel q s'appelle la raison de la suite géométrique (U_n)

$$U_0 \xrightarrow{\times q} U_1 \xrightarrow{\times q} U_2 \xrightarrow{\times q} U_3 \;\ldots\ldots \xrightarrow{\times q} U_{n-1} \xrightarrow{\times q} U_n \xrightarrow{\times q} U_{n+1} \xrightarrow{\times q} \ldots$$

$$U_0 \xrightarrow{\times\, q^n} U_n$$

Remarque :

Pour démontrer qu'une suite est une suite géométrique dont les termes sont non nuls, on pourra calculer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$
Si on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = constante$ alors (U_n) est une suite géométrique.

Remarque :

Dans le cas où $q = 0$ tous les termes de la suite sont nuls à partir de son deuxième terme U_{n_0+1}.

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{5}{3^n}$
On remarque que les termes de la suite sont tous strictement positifs
et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{5}{3^{n+1}}}{\frac{5}{3^n}} = \frac{1}{3} = constante$ donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

Propriété :

Une suite (U_n) est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers n et p on a : $U_n = U_p \times q^{n-p}$
En particulier si $p = 0$ alors $U_n = U_0 \times q^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ tel que U_0 est le premier de la suite

Définition :

Le terme $U_n = U_0 . q^n$ est appelé <u>terme général</u> de la suite géométrique <u>de premier terme</u> U_0 et raison q.
Les deux formules de la propriété permettent de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique ou sa raison.

Propriété :

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels .La suite (U_n) définie par $U_n = a.b^n$ est une suite géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $U_0 = a$ tels que :
$U_{n+1} = a.b^{n+1} = a.b^n.b = U_n.b$ et $U_0 = a.b^0 = a.1 = a$

Théorème :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites géométriques des raisons respectives q et q' alors le produit (W_n) de ces deux suites définie par $W_n = U_n \times V_n$ est une suite géométrique de raison $q'' = q.q'$

Exercice 1:

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier U_0 tels que $U_3 = 24$ et $U_6 = 192$. Déterminer la raison q et le premier terme U_0 de cette suite.

Exercice 2 :

Soit (U_n) une suite géométrique tels que $U_3 = 6\sqrt{2}$ et $U_5 = 12\sqrt{2}$.
Déterminer le terme U_4 de cette suite.

Propriété :

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si : $b^2 = a.c$

II. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

1) Somme des puissances successives d'un réel non nul:

Théorème :

Soit q un nombre réel différent de 1 alors :

$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ C'est-à-dire

$1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration : On a $q \neq 1$ et soit

$S = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^n$ Donc

$S = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^n$

$S.(1-q) = (1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n).(1-q)$

$= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n - q^1 - q^2 - q^3 - \dots - q^n - q^{n+1}$

$= 1 - q^{n+1}$ Alors $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque

Cette formule n'est pas valable pour q=1 mais dans ce cas on a :

$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots\dots\dots + 1}_{(n+1)\ fois} = n + 1$ le calcul est immédiat

Exercice :

Calculer les sommes suivantes :

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots + 2^n =$

$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots\dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$1 + \sqrt{2}^1 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5 + \sqrt{2}^6 + \sqrt{2}^7 + \sqrt{2}^8 =$

2) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Remarque

Le nombre des termes d'une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $=$ (indice dernier terme – indice premier terme $+ 1$)

$= p - q + 1$

a) Calcule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q

On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 \dots\dots\dots + U_{n-1}$

$= U_0 + U_0.q + U_0.q^2 + \dots\dots\dots\dots + U_0.q^{n-1}$

$= U_0.(1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^{n-1})$

$= U_0.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

b) Conséquence :

Si U_p , U_{p+1} , ……………… , U_{q-1} , U_q sont des termes consécutifs d'une suite géométrique alors la somme de ces termes consécutifs est :

$U_p + U_{p+1} + \dots + U_q = U_p + U_p.q + U_p.q^2 + \dots + U_p.q^{n-p}$

$= U_p.(1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^{n-p})$

$= U_p.\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

Retenons :

- La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$S = U_p.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$, où U_p est le premier terme de cette suite.

$S = \text{le premier terme de la somme}.\left(\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\right)$

- La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme U_0 est : $S_n = U_0.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

Exercice :

1) Calculer les sommes suivantes :

$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \dots\dots + \frac{1}{6} \times 3^9$

$B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\dots\dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{11}$

2) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, de pramier terme U_0 telle que $U_0 + U_1 + \dots\dots\dots\dots + U_6 = \frac{364}{27}$, calculer U_0