| Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo | Chapitre : Translations | Prof : Ayadi Mondher<br>2 ème sciences |
|---|---|---|

# I. Notion d'application du plan dans le plan

**Définition :**

Lorsque à tout point M du plan on associe un seul point M' ,on définit une application du plan dans lui même


Si on note f cette application alors

on écrit $f : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto M'$

Le point M' s'appelle l'image de M par l'application f

Le point M s'appelle l'antécédent de M' par l'application f

**Exemples :**

- Soit I un point du plan.

  La symétrie central $S_I : P \longrightarrow P$

  $M \longmapsto M'$

  Tel que I le milieu de [MM'], on dit que $S_I$ est l'application du plan dans lui même

- Soit D une droite :

  La symétrie orthogonale $S_D : P \longrightarrow P$

  $M \longmapsto M'$

  Tel que D est la médiatrice du segment [MM'] est une application du plan dans lui même

# II. Translations :

## 1) Pour démarrer :

**Activité :**

Soit ABCD un parallélogramme :

a) Donner deux vecteurs égaux.
b) Trouver une application qui envoie A en B et D en C.
c) Quelle est l'image de la droite (AB) par cette application ?
d) Déduire l'image du segment [AG], l'image de la demi-droite [AB]

$$\left( \text{Soit } f : P \longrightarrow P \quad M \longmapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \right)$$

## 2) Translations :

**Définition :**

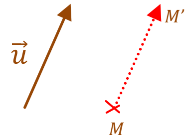
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan fixé.

On appelle translation du vecteur $\vec{u}$ qu'on note $t_{\vec{u}}$ l'application du plan dans lui même qui à tout point M du plan on associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

On écrit $t_{\vec{u}} : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto t_{\vec{u}}(M) = M'$

Et on dit que M' est l'image de point M par $t_{\vec{u}}$ « la translation du vecteur $\vec{u}$ » et on note $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$




**Exercice :**

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et A et B deux points.

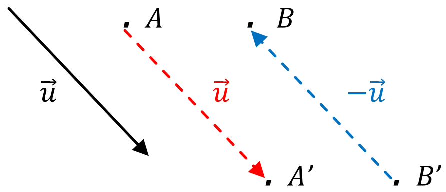
a) Déterminer A' l'image de point A par la translation $t_{\vec{u}}$.

b) Placer le point B l'antécédent de point B' par la translation $t_{\vec{u}}$.

**Correction :**

a) On dit que A' est l'image de point A par $t_{\vec{u}}$ donc on note $t_{\vec{u}}(A) = A'$ équivaut à $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

b) B est l'antécédent de point B' par la translation $t_{\vec{u}}$ donc B' est l'image de B par $t_{\vec{u}}$ donc on a $t_{\vec{u}}(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'B} = -\vec{u}$



**Remarque :**

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{0}}$ est l'application identique.
- Soit $M' \epsilon P$, il existe un unique point M du plan tel que $t_{\vec{u}}(M) = M'$
  On dit que M est l'antécédent du point M' par $t_{\vec{u}}$ .

**A retenir :**

Une telle application du plan dans lui même assurant cette correspondance « un à un » est appelée une transformation.

## III. Propriétés de translations :

### 1) Propriété caractéristique :

**Activité :**

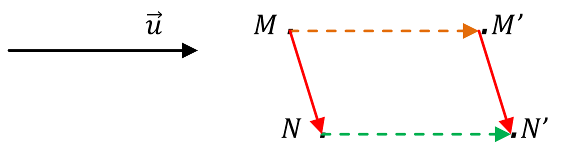
Soient M et N deux points du plan et $\vec{u}$ un vecteur.

a) Placer les points M' et N' les images respectives des points M et N par la translation du vecteur $\vec{u}$ .

b) Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ .

**Correction :**

a) Figure :




b) On a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $t_{\vec{u}}(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$ $\Big\}$ Alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

On déduit que MM'N'N est un parallélogramme donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

**Propriété fondamentale :**

Si on a : $\left.\begin{matrix} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

### 2) Images : d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite et d'un cercle:

**Activité :**

Soient A et B deux points distincts et $\vec{u}$ un vecteur du plan .

A' et B ' les images respectives des points A et B par la translation $t_{\vec{u}}$ .

a) Soit $M \in (AB)$ et M' l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$ .
Montrer que M' ∈ (A'B').

b) Si N' ∈ (A'B') et N son antécédent par la translation $t_{\vec{u}}$ .
Montrer que N ∈ (AB).

c) Que peut on déduire pour l'image du segment [AB] par $t_{\vec{u}}$ ? et l'image de la demi droite [AB) par $t_{\vec{u}}$ ?

d) Soit $\varphi_{(A\ ,\ AB)}$ le cercle de centre A et de rayon AB. Montrer que l'image de $\varphi$ par $t_{\vec{u}}$ est le cercle $\varphi'_{(A'\ ,\ AB)}$ ?

**Correction :**

a) $M \epsilon (AB)$ alors il existe un réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

On a $\left.\begin{matrix} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\left.\begin{matrix} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(M) = M' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

On a $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{A'M'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow M' \in (A'B')$

b) On a $N' \in (A'B')$ alors il existe un réel $\beta$ tel que $\overrightarrow{A'N'} = \beta\,\overrightarrow{A'B'}$

On a $\left.\begin{matrix} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\left.\begin{matrix} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(N) = N' \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'N'} = \overrightarrow{AN}$

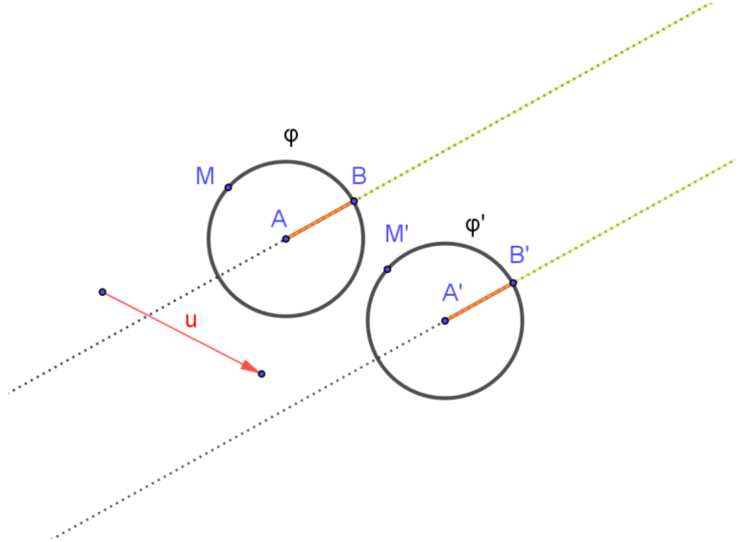
Puisque : $\overrightarrow{A'N'} = \beta\,\overrightarrow{A'B'} \Longrightarrow \overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow N \in (AB)$

Donc on conclut que l'image de (AB) par $t_{\vec{u}}$ est la droite (A'B') qui lui est parallèle et on note $t_{\vec{u}}((AB)) = (A'B')$

c) L'image du segment [AB] par la translation $t_{\vec{u}}$ est le segment [A'B']
L'image de la demi droite [AB) par $t_{\vec{u}}$ est la demi droite [A'B').

d) On a : $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \implies A'B' = AB = \mathcal{R}$ rayon de $\varphi$

- Soit $M \in \mathcal{C}$ tel que $M'$ son image par $t_{\vec{u}}$ alors on a
  $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(M) = M' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \implies A'M' = AM = \mathcal{R}$ rayon de $\varphi$
  Donc $A'M' = AB = \mathcal{R}$ donc $M' \in \varphi'_{(A',\ AB)}$




*Théorème :*

$A$ et $B$ deux points distincts $A'$ et $B'$ leurs images respectives par $t_{\vec{u}}$ alors :
- L'image d'une droite (AB) par $t_{\vec{u}}$ est la droite (A'B') qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment [AB] par $t_{\vec{u}}$ est le segment [A'B'].
- L'image de l demi droite [AB) par $t_{\vec{u}}$ est la demi droite [A'B').
- L'image d'un cercle $\varphi_{(I\ ,\ \mathcal{R})}$ par $t_{\vec{u}}$ est le cercle $\varphi'_{(I'\ ,\ \mathcal{R})}$ tel que $I' = t_{\vec{u}}(I)$

### 3) Conservation : de distance, de l'alignement, de milieu et de barycentre:

**Activité 1**:

Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 3), soit I le milieu de [AB] et $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On pose $A' = t_{\vec{u}}(A)$, $B' = t_{\vec{u}}(B)$ , $G' = t_{\vec{u}}(G)$ et $I' = t_{\vec{u}}(I)$

a) Montrer que G' est le barycentre des points pondérés (A', 2) et (B', 3) et déduire que A', B' et G' sont alignés.

b) Montrer que I' est le milieu de [A'B'].

**Correction :**

a) G est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 3) alors

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ alors A, B et G sont alignés.

On a $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(G) = G' \\ t_{\vec{u}}(A) = A' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA}$ et $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(G) = G' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}$

Puisque $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{G'A'} + 3\overrightarrow{G'B'} = \vec{0} \iff G'$ est le barycentre des points pondérés (A', 2) et (B', 3) et on a $\overrightarrow{A'G'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A'B'} \implies$ les points $A'$, $G'$ et $B'$ sont alignés de même on a $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA} \implies G'A' = GA$ et $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB} \implies G'B' = GB$

Donc la translation conserve le barycentre , l'alignement et la distance.

b) On a I le milieu de [AB] $\iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

On a $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(I) = I' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'I'} = \overrightarrow{AI}$ et $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(B) = B' \\ t_{\vec{u}}(I) = I' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{I'B'} = \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \implies \overrightarrow{A'I'} = \overrightarrow{I'B'} \iff I'$ est le milieu de $[A'B']$

Donc la translation conserve le milieu .

**Activité 2**:

Soient D et Δ deux droites et D' et Δ' leurs images par $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}$ est un vecteur du plan. Que peut-t-on dire des droites D' et Δ' si :

a) D et Δ sont parallèles.

b) D et Δ sont perpendiculaires.

**Correction** :

a) On a :

$$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(D) = D' \implies D \parallel D' \\ t_{\vec{u}}(\Delta) = \Delta' \implies \Delta \parallel \Delta' \\ \text{et on a } D \parallel \Delta \end{array}\right\} \text{alors } D' \parallel \Delta'$$

b) On a :

$$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(D) = D' \implies D \parallel D' \\ t_{\vec{u}}(\Delta) = \Delta' \implies \Delta \parallel \Delta' \\ \quad \text{et on a } D \perp \Delta \end{array}\right\} \text{alors } D' \perp \Delta'$$

Donc la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité

**Activité 3**:

1) Soit $B\hat{A}C$ un angle et $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On pose $A' = t_{\vec{u}}(A)$, $B' = t_{\vec{u}}(B)$ et $C' = t_{\vec{u}}(C)$
Montrer que $B'\widehat{A'}C' = B\hat{A}C$

2) Soit $\Delta$ une droite tangente a un cercle $\varphi_{(I,\ r)}$ en un point M.
On pose $\Delta' = t_{\vec{u}}(\Delta)$, $\varphi' = t_{\vec{u}}(\varphi)$ , $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $I' = t_{\vec{u}}(I)$
Montrer que la droite $\Delta'$ est tangente au cercle $\varphi'_{(I',\ r)}$.

**Correction :**

1)

On a : $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \implies (A'B') \parallel (AB)$

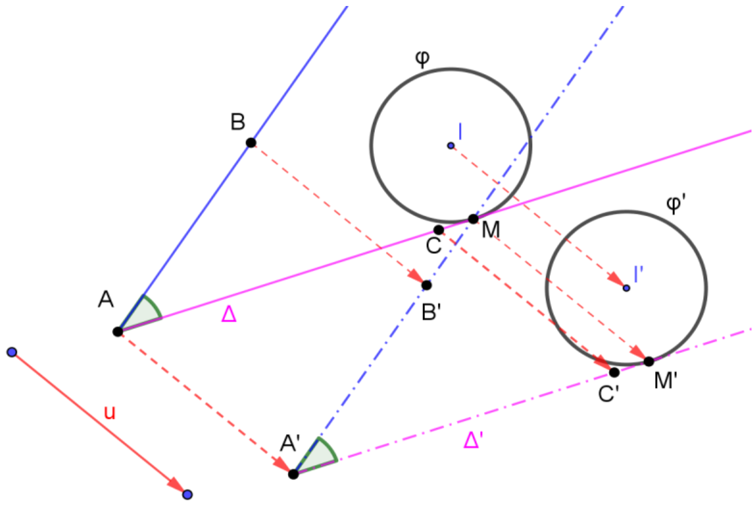
On a: $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(C) = C' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \implies (A'C') \parallel (AC)$

On Remarque que la droite (A'B') coupe les deux droites $(A'C')$ et $(AC)$ respectivement en deux points A' et M donc les deux angles $A\widehat{M}A'$ et $M\widehat{A'}C'$ sont alternes-internes égaux donc $A\widehat{M}A' = M\widehat{A'}C'$ (1)

La droite (AC) coupe les deux droites $(A'B')$ et $(AB)$ respectivement en deux points A et M donc les deux angles $A\widehat{M}A'$ et $B\hat{A}M$ sont alternes-internes égaux donc $A\widehat{M}A' = B\hat{A}M$ (2)

D'après (1) et (2) on a $B\hat{A}M = M\widehat{A'}C' \iff B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$

Donc on dit que la translation conserve les angles.




2) On a $M \in \Delta \cap \varphi$ , IM=$r$ et $\Delta \perp (IM)$ ainsi $M' \in \Delta' \cap \varphi'$, I'M'=$r$ et $\Delta' \perp (I'M')$ donc $\Delta'$ est tangente à $\varphi'$ en M'

**Proprieties:**

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan et A', B', C' et D' leurs images respectives par $t_{\vec{u}}$.
La translation conserves:

- **L'alignement :** Si A, B et C trois points alignés alors A', B' et C' sont alignés.
- **Le barycentre :** Si C est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) alors C' est le barycentre des points pondérés (A', a) et (B', b).
- **Le milieu :** Si C est le milieu du [AB] alors C' est le milieu de [A'B'].
- **La distance** : AB=A'B'.
- **Le parallélisme :** Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$
- **L'orthogonalité :** Si $(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$
- **Les angles :** $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$
- **Le contact :** Si $\Delta$ une droite tangente a un cercle $\varphi$ alors leurs images $\Delta'$ et $\varphi'$ sont tangentes.