Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo	Chapitre : Suites arithmétiques	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences 2 ème technologie de l'infomatique

I. Introduction :

1) Définition d'une suite :

Une suite (U(n))est une fonction définie su une partie de E de l'ensemble ℕ qui à tout entier naturel n de E on associe un et un seul réel noté U(n). Plus généralement la suite (U(n)) se note $(U_n)_{n\in E}$ ou (U_n) et le réel U(n) se note U_n .
Autrement dit $(U_n) : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longrightarrow U_n = U(n)$

Remarque :

U_n s'appelle terme général de la suite (U_n) ou le terme d'indice n ou le terme de rang n ou le terme d'ordre n .

2) Pour définir une suite :

On a trois manières pour définir une suite :

1 ere manière :

Une suite peut etre définie par un tableau , comme dans l'exemple suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
U_n	5	3	0	1	3	2	7

2 ème manière :

Une suite peut définir par une fonction , par exemple :

$U_n = \frac{2n+5}{n+1}$ ou $U_n = n^2 - 2n + 4$

3 ème manière :

Une suite peut définir par une relation de récurrence par exemple :

$U_{n+1} = 3U_n + 4$ tel que $U_0 = \alpha$

Remarque :

Les deux derniers suites sont appelées suites récurrentes

Exercice 1 :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 3}$ définie par $U_n = \frac{n}{n-2}$

1) Calculer U_3 , U_4 , U_5 et U_{24}
2) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n
3) Comparer U_{n+1} et U_n

Exercice 2 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = -3$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$

Calculer U_1 , U_2 , U_3 et U_4

Exercice 3 :

On considère la suite suivante : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2n + 1 \end{cases}$

Calculer U_1 , U_2 , U_3

II. Suites arithmétiques :

1) Définition et Théorème :

Définition

On dit que la suite (U_n) est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que , pou tout entier naturel n , on nait $U_{n+1} = U_n + r$

$$U_0 \xrightarrow{+r} U_1 \xrightarrow{+r} U_2 \xrightarrow{+r} U_3 \;\ldots\ldots \xrightarrow{+r} U_{n-1} \xrightarrow{+r} U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1} \xrightarrow{+r} \ldots$$

$$U_0 \xrightarrow{\qquad\qquad +nr \qquad\qquad} U_n$$

Remarque

Soit (U_n) une suite, si on a $U_{n+1} - U_n = r = constante$ alors (U_n) est une suite arithmétique

Théorème :

Une suite (U_n) est arithmétique de raison r si et seulement si pou tous entiers n et p on a : $U_n = U_p + (n-p)r$
En particulier si p=0 alors $U_n = U_0 + nr \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Remarque

> *Le terme $U_n = U_0 + nr$ est appelé terme général de la suite arithmétique de premier terme U_0*
> *Les deux formules de théorème permettent de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique ou sa raison.*

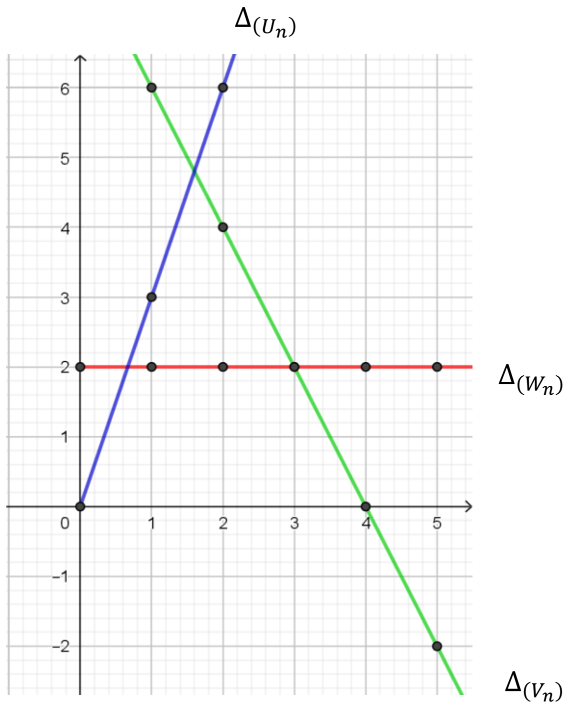
Exercice 1 :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1) *Sachant que r=2 et $U_4 = 18$, calculer U_0 et U_8*
2) *Sachant que $U_5 = 75$ et $U_3 = 45$, calculer r et U_0*
3) *Sachant que $U_2 = 2\pi^2 + \pi$ et $U_4 = 6\pi^2 - \pi$, calculer U_3*

2) *Représentation graphique :*

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ,\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ})$.



a) *Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 0$ et de raison $r = 3$.*
   1. *Calculer U_1 et U_2*
   2. *Placer les points $A(0\ ;\ U_0)$, $B(1\ ,U_1)$ et $C(2\ ,U_2)$*
   3. *Que remarquez-vous ?*
b) *La droite $\Delta_{(V_n)}$ contient les points $A_n(n\ ,\ V_n)$ ou (V_n) est une suite. Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme V_0 et la raison r*
c) *Montrer que la suite (W_n) est une suite constante dont on précisera son terme général W_n et que sa raison $r = 0$*

Remarque

> *Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.*
> *Les points A_n de coordonnées $(n\ ,\ U_n)$ sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l origine le premier terme U_0*

3) *Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :*

a) *Calculer chacune des sommes suivantes :*

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ \dots\dots\dots\dots\dots + n$

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ \dots\dots\dots\dots. + (2n - 1)$

b) *Calculer le nombre de termes de chacun des sommes suivantes :*

$A = 1 + 2 + 3 + \cdots \dots\dots + 99 + 100$

$B = 1 + 2 + 4 + \ \dots\dots. + 2^{n-1} + 2^n$

$C = U_0 + U_1 + U_2\ \dots\dots\dots + U_{n-1} + U_n$

$D = U_{45} + U_{46} + \ \dots\dots. + U_{381}$

Remarque

> *Le nombre des termes d'une somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique $=$ (indice dernier terme – indice premier terme $+ 1$)*
> $= p - q + 1$

c) ***Calcule de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :***

Soit (U_n) *une suite arithmétique de premier terme* U_0 *et de raison* r

On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 \dots\dots\dots. + U_{n-1}$

$$= U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + \dots\dots\dots\dots + (U_0 + (n-1)r)$$

$$= nU_0 + r.[1 + 2 + \dots\dots\dots + (n-1)]$$

$$= nU_0 + r.\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]$$

$$= \frac{2nU_0 + n(n-1)r}{2} = \frac{n[2U_0 + (n-1)r]}{2}$$

$$= \frac{n[U_0 + (U_0 + (n-1)r)]}{2}$$

$$= \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}$$

d) ***Conséquence :***

Si U_p , U_{p+1} , … … … … .. , U_{q-1} , U_q *sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique :*

Alors $U_p + U_{p+1} + \dots\dots\dots\dots.. + U_{q-1} + U_q = \frac{(q-p+1)[U_p + U_q]}{2}$

Retenons :

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$S = \frac{n\times(a+b)}{2}$ *, où a est le premier terme de cette somme et b le dernier terme.*

$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{le premier terme de la somme} + \text{le denier terme})}{2}$

Résultat fondamental. Pour tout n : $1 + 2 + \dots.. + n = \frac{n(n+1)}{2}$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme U_0 *est :* $S_n = \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}$