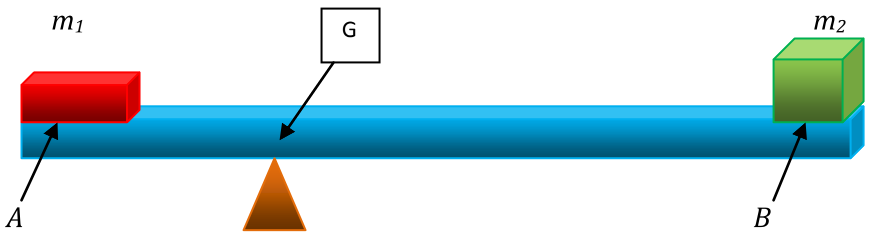
Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo	Chapitre : Barycentre	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences

I. Historique

*Le premier à avoir étudié le barycentre est le mathématicien et physicien **Archimède** au IIIème siècle avant Jésus-Christ. Le barycentre est initialement le centre des poids tel que sur une tige ou on a accroché aux extrémités A et B les deux masses m_1 et m_2*

D'après Archimède le système est en équilibre lorsque $m_1.GA = m_2.GB$

On dit que le point G est le point d'équilibre des points A et B affectés respectivement des masses m_1 et m_2



Pour que l'équilibre soit atteint, il faut que les moments $m_1.GA$ et $m_2.GB$ soient égaux. Cette condition se traduit par l'égalité vectorielle :

$$m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

II. Barycentre de deux points :

1) Points pondérés

Définition

> *Un point pondéré (point massif ou point coefficient) est un couple (A, a) où A est un point du plan et a est un nombre réel quelconque (masse ou poids ou coefficient du point A).*

2) Barycentre de deux points pondérés

Théorème et définition

> *Soient $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$ deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$.*
> *Le point G qui vérifier la relation $a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé le barycentre des points pondérés $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$. Le point G est un point unique.*
> *On dit aussi que G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.*

Exercice :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$ tel que $a + b \neq 0$

a) *Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}.\overrightarrow{AB}$*

b) *Déduire l'unicité de G.*

Correction :

a) *G est le barycentre des points pondérés $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$ tel que $a + b \neq 0$ alors on a :*

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ *équivaut à* $a\,\overrightarrow{GA} + b\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

équivaut à $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

équivaut à $(a+b)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ *équivaut à* $(a+b)\,\overrightarrow{GA} = -b\,\overrightarrow{AB}$

équivaut à $(a+b)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$.

b) *1ère méthode*

on a $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$ *donc G est unique.*

2ème méthode

Supposons qu'il existe un autre point G' barycentre des points pondérés (A , a) et (B , b) avec $a + b \neq 0$ donc on a $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$ *équivaut à*

$a\left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}\right) + b\left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$

équivaut à $a\overrightarrow{G'G} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{G'G} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

équivaut à $(a+b)\overrightarrow{G'G} + \underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}_{=\,\vec{0}} = \vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$ équivaut à G'=G donc G est un point unique .

Remarque :

Le barycentre G des points pondérés (A , a) et (B , b) est le point défini par l'une des relation suivantes : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$ .Le point G appartient à la droite (AB)

3) <u>Isobarycentre :</u>

Définition

Pour tout nombre réel a non nul, le barycentre de (A, a) et (B, a) est appelé isobarycentre de A et B.

Propriété :

L'isobarycentre de A et de B est milieu du segment [A B].

<u>Démonstration</u>

Si G est l'isobarycentre de (A, a) et de (B, a) avec $a \neq 0$, alors on a

$a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

c'est-à-dire $a(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ .Puisque $a \neq 0$ on en déduit $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$ ce qui montre que G est le milieu du segment [AB].

Remarque

Le préfixe iso signifie égal.
L'isobarycentre de deux points est le barycentre de ces points affectés de masses égales.

4) <u>Homogénéité du barycentre</u>

<u>Propriété</u>

On ne change le barycentre de deux points massifs en multipliant ou en divisant les coefficients par un même nombre non nul k .

Démonstration

Soient A et B deux points et a et b deux nombres réels tel que $a + b \neq 0$.
Soit k un nombre réel non nul et soit G le barycentre de (A, ka) et (B, kb).
Alors on a $ka.\overrightarrow{GA} + kb.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
si et seulement si $k\,(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ et puisque $k \neq 0$, cela équivaut à $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
ce qui montre que G est le barycentre de (A, a) et de (B, b).

5) Construction du barycentre :

Soit G le barycentre des deux points pondérés (A, a) et (B , b) tel que $a + b \neq 0$

a) <u>partager un segment : (a et b de même signe (dans $\mathbb{Z}$))</u>

on a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ *et on a* $0 \leq \frac{a}{a+b} \leq 1$

$\Leftrightarrow G \in [AB]$

Pour placer le point G on partage [AB] en $|a + b|$ segment de même mesure et on place G à la $|b|^{ème}$ point de A

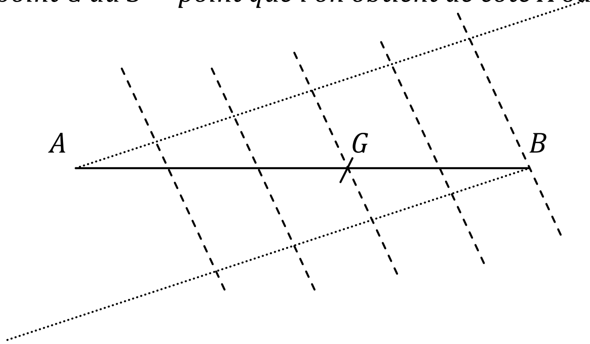
Cette construction est une application du théorème de Thalès

<u>Exemple :</u>

Soit G le barycentre des deux points pondérés (A, 2) et (B , 3) . On a $2 + 3 \neq 0$

Donc $2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ *et on a* $0 \leq \frac{3}{5} \leq 1$

Pour placer le point G on partage [AB] en 5 segments de même mesure et on désigne le point G au 3ème point que l'on obtient de coté A ou au 2ème point de coté de B



b) *méthode des parallèles*

soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés et soit G leur barycentre .
on trace la droite D_A passant par A et ne contenant pas B et soit D_B la droite passant par B et parallèle à D_A .Les deux droites D_A et D_B sont respectivement menus des deux repères $(A, \vec{\imath})$ et $(B, \vec{\imath})$

on construire ensuite deux points A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = b.\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{BB'} = -a.\vec{\imath}$

on montre que G est le barycentre des points pondérés (A' , b) et (B' , a)

Preuve :

On a (A, a) et (B, b) deux points pondérés et soit G leur barycentre donc on a :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A}\right) + b\left(\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}\right) = \vec{0}$$

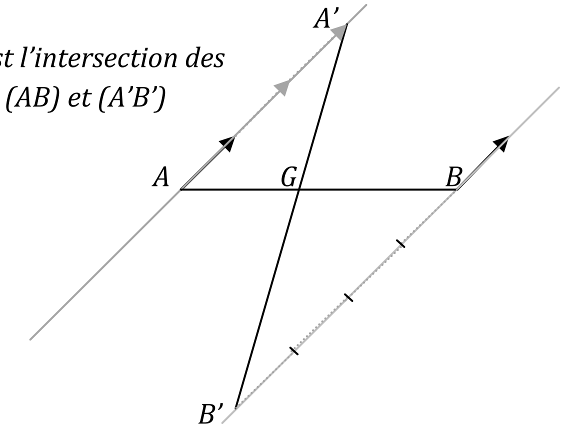
$$\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA'} + a\,\overrightarrow{A'A} + b\,\overrightarrow{GB'} + b\,\overrightarrow{B'B} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA'} + b\,\overrightarrow{GB'} + a\,\overrightarrow{A'A} + b\,\overrightarrow{B'B} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$a\,\overrightarrow{GA'} + b\,\overrightarrow{GB'} + \underbrace{a\,b\,\vec{\imath} + b\,(-a)\,\vec{\imath}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA'} + b\,\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$$

Donc G est le barycentre des points pondérés (A' , b) et (B' , a)

Le point G est l'intersection des deux droites (AB) et (A'B')



c) *Méthode du parallélogramme :*

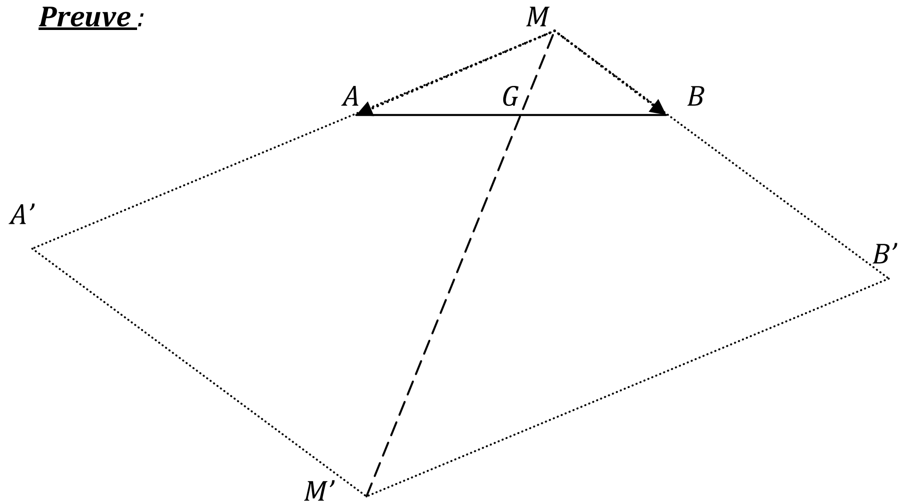
Soit G le barycentre des points pondérés (A , a) et (B , b) et M un point du plan n'appartient pas à (AB) .

On construit le point A' tel que $\overrightarrow{MA'} = a\,.\overrightarrow{MA}$ et le point B' tel que $\overrightarrow{MB'} = b\,.\overrightarrow{MB}$

Soit M' le point tel que MA'M'B' soit un parallélogramme

On montre que $G \in (MM')$

Preuve :



G est le barycentre des points pondérés (A , a) et (B , b) donc on a

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$a\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}\right) + b\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GM} + a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{GM} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA'} + b\,\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{B'M'} + b\,\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M'B'} + \overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{M'M}$$

Donc G est un point de la droite (MM'). On conclut que G est l'intersection des deux droites (AB) et (MM')