LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{ème}$ Sc. Techniques »	SERIE D'EXERCICES N°16 *Logarithme népérien*

EXERCICE 1:

A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.
2) Calculer g(1). En déduire le signe de $g(x)$ suvant les valeurs de x dans $]0,+\infty[$.

B/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que : $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
3) Montrer que (C) admet au V $(+\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{\jmath})$.
4) Tracer la courbe (C).

C/ Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = x.(lnx)^2 - 2x.lnx$

1) Justifier l'existence des primitives de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2) Calculer h'(x) pour tout x > 0
3) En déduire la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 2 :

A/ Soit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = x(1-lnx)+1 & si \quad x>0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

1) a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.
   b) Etablir le tableau de variation de h.
   c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$ et que $3,5 < \alpha < 3,6$.
   d) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{lnx}{x+1}$
   a) Montrer que $(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   b) Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x(x+1)^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f. En déduire que $lnx \leq \frac{x+1}{\alpha}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   d) Tracer la courbe (C) de f.

EXERCICE 3 :

Soit la fonction $f$définie sur IR par : $f(x) = x - ln(x^2+1)$.
On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Justifier que la fonction f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2) Etablir le tableau de variation de f.
3) Montrer que (C) admet deux points d'inflexions A et B.
4) Etudier les branches infinies de (C).
5) a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point O.
   b) Etudier la position de (C) par rapport à T.
6) Tracer la courbe (C) et la tangente T.

EXERCICE 4 :

A/ Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b.\ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (où a et b sont deux réels).

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

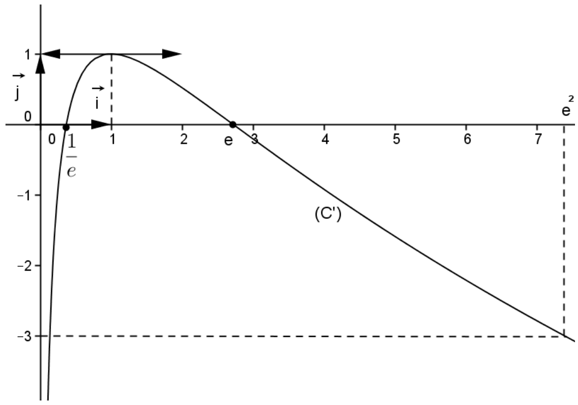
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On suppose que la courbe représentative (C) de f passe par le point A$(1,1)$ et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y = x$

1) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2) En déduire les valeurs de a et b.

B/ Dans la suite on prend : $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ qu'on précisera.
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et l'axe des abscisses.
4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction $h : x \mapsto x - x\ln x - 1$
   b) En déduire que $x - x\ln x \leq 1$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   c) Etudier alors la position de (C) par rapport à T.
5) Tracer la tangente T et la courbe (C).

EXERCICE 5 :



Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = -x(a + b\ln x)^2$ où a et b sont deux réels tels que $a > 0$ et $b > 0$.

On admet que $f(\frac{1}{e}) = -\frac{4}{e}$ et $f(e) = 0$

1) a) En utilisant l'égalité : $x\ln^2 x = \left(\sqrt{x}\ln x\right)^2$ pour tout $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln^2 x$
   b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
2) A l'aide du graphique dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Par une lecture graphique :
   a) Déterminer $f'(1)$ et $f''(1)$.
   b) Montrer que le point A(1,-1) est un point d'inflexion de (C) (la courbe de f selon le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4) En se servant des valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et $f(e)$, montrer que : a $=1$ et b $= -1$.
5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f sur $]e,+\infty[$.
   a) Calculer $f(e^2)$
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $(-e^2)$ et calculer $(f^{-1})'(-e^2)$