

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f
- c) En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- 4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$
- b) Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$. En déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2})$
- c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.
- 5) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère.

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
- 2) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3) Montrer que la droite $D : x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C)
- 4) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
- 5) Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

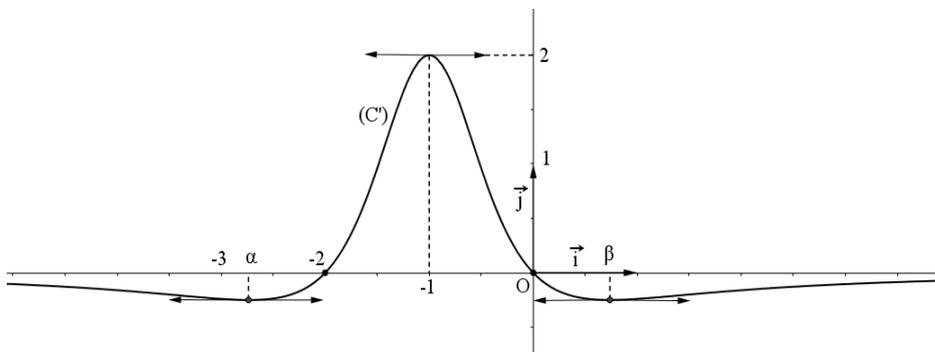
EXERCICE 3 :

On donne ci-contre dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R}

par : $f(x) = \frac{2(ax+b)}{x^2+2x+2}$

(où a et b sont deux réels).

La courbe (C') admet uniquement 3 tangentes horizontales et elle coupe l'axe (O, \vec{i}) en exactement 2 points. On désigne par (C) la courbe représentative de f selon le repère orthonormé (O', \vec{u}, \vec{v}) .



- 1) a) Montrer que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{-2ax^2 - 4bx + 4a - 4b}{(x^2 + 2x + 2)^2}$
- b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(-1)$. En déduire que $a=b=1$

- 2) Par une lecture graphique :
 - a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - b) Justifier que les points de la courbe (C) d'abscisses α , β et -1 sont des points d'inflexion de (C).
- 3) Montrer que le point A(-1,0) est un centre de symétrie de la courbe (C).
- 4) On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$
 - a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0, +\infty[$.
 - b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ω dans \mathbb{R} puis vérifier que $\omega \in \left] \frac{4}{5}, 1 \right[$.
- 5) Tracer la courbe (C) et la droite $\Delta : y = x$ dans le même repère (O', \vec{u}, \vec{v}) .
- 6) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.
 b) Tracer la courbe (Γ) de la fonction réciproque f^{-1} dans le repère (O', \vec{u}, \vec{v}) .

EXERCICE 4 :

I/ Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 4x^3 + 3x - 1$

- 1) Etablir le tableau de variation de la fonction g
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} et que $0 < \alpha < 1$
- 3) En déduire le tableau de signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II/ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- 2) Etablir le tableau de variation de la fonction f .
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.
- 4) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

A/ 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{2(1-x^2)^2 \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Tracer la courbe (C).

B/ 1) Montrer que f admet une fonction réciproque (qu'on notera f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

- 2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J .
- 3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x appartenant à J .
- 4) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} .

C/ Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \cos(x) \cdot f(\sin(x))$. Soit (Γ) sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

- 1) Montrer que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $g(x) = \sqrt{\sin x}$
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

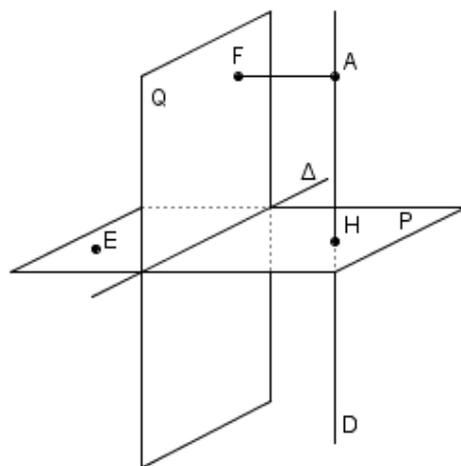
- 3) Etudier la dérivabilité de la fonction g sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- 4) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K qu'on précisera.
- 5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que $(g^{-1})'(x) = \frac{\sqrt{1-x^4}}{2x}$ pour tout réel $x \in K$

EXERCICE 6 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la droite D définie par le

système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- 1) Vérifier que la droite D passe par le point $A(3, 2, 1)$ et en donner un vecteur directeur \vec{u} .
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $E(0, 2, 1)$ et perpendiculaire à la droite D .
- 3) a) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P .
b) En déduire la distance du point A au plan P .
- 4) Soit le plan Q d'équation : $x + y - z + 1 = 0$.
a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires.
b) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (notée Δ).
- 5) Calculer la distance d du point A au plan Q .
- 6) Soit F le projeté orthogonal de A sur le plan Q . Le plan (AFH) coupe la droite Δ en un point K .
Calculer la distance AK .



EXERCICE 7 :

L'espace \mathcal{E} étant muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(1, 1, 0)$, $B(4, 1, -1)$ et $C(0, -1, -1)$.

- 1) a) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan P .

1) Soit la droite D :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - 6t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Montrer que $D \perp P$ et déterminer leur point d'intersection K .

- 2) a) Vérifier que le point $E(1, -2, 0)$ n'appartient pas au plan P .
b) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur P .

EXERCICE 8 :

Dans l'espace \mathcal{E} muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(2, 0, 2)$ et les plans $(P) : 2x - y + 4z - 11 = 0$ et $(Q) : x - 2y - z - 1 = 0$.

- 1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D .

2) Soit la droite Δ définie par :
$$\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Etudier la position relative des droites D et Δ .
- b) Déterminer une équation du plan (R) contenant la droite D et parallèle à la droite Δ .