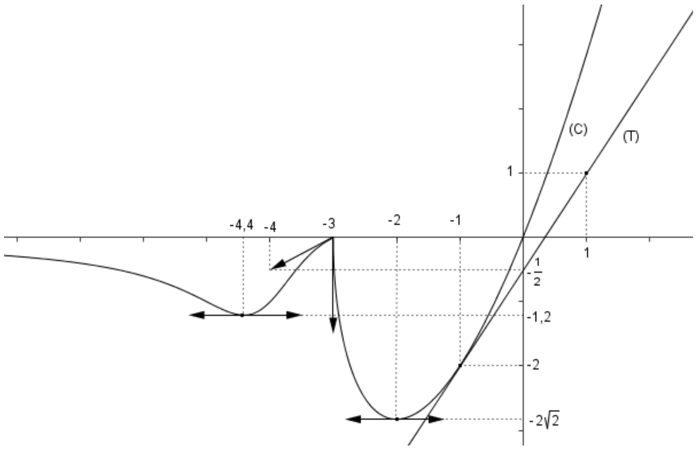
SERIE D'EXERCICES N°7'
Dérivabilité - Bijection

EXERCICE 1 :



Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.

- (T) est la tangente à (C) au point A(1,1).
- Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.
- La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.

I/ 1) a) Déterminer : $f'_g(-3)$ et $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{f(x)}{x+3}$

b) Résoudre dans IR l'équation $f'(x) = 0$

2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

II/ Soit g la restriction de f à l'intervalle [-2,+∞[.

1) Montrer que g réalise une bijection de [-2,+∞[sur un intervalle J qu'on précisera.
2) Déterminer g(-2), puis étudier la dérivabilité de la fonction g^{-1} à droite en (-2).
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g^{-1} sur l'intervalle [-2,+∞[.
4) Déterminer $g^{-1}(-2)$. En déduire $(g^{-1})'(-2)$.
5) Dresser la tableau de variation de la fonction g^{-1}.
6) Tracer la courbe de la fonction g^{-1} sur le graphique donné ci-dessus.

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur [-3,+∞[par $f(x) = x\sqrt{2x+6}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé du plan $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-3). En déduire une interprétation géométrique

b) Montrer que f est dérivable sur]-3,+∞[et que $f'(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$ $\forall$ x ∈]-3,+∞[.

2) Etablir le tableau de variation de f.

3) Soit la fonction g définie sur [0,+∞[par $g(x) = \sqrt{x} - 3$.

a) Montrer que la fonction $f$og est dérivable en 9 et calculer $(f\text{og})'(9)$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 0.

c) Montrer que $f$og est dérivable sur]0,+∞[et calculer $(f\text{og})'(x)$ pour tout x∈]0,+∞[.

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur]0, +∞[par $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur]0, +∞ [et que $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

www.devoirat.net 2017

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

c) En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

b) Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$. En déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

5) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=1-\tan x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur IR.

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur iR

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$. En déduire $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(2)$

c) Montrer que pour tout réel x on a : $\tan(f^{-1}(x)) = 1-x$. En déduire que :

$$(f^{-1})'(x)= \frac{1}{-x^2+2x-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)= \frac{1}{1+\sin x}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3) Calculer $f(\frac{\pi}{6})$. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{2}{3}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{2}{3})$.

4) a) Montrer que f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2},1]$

c) Montrer que $\sin(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} - 1$ et que $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$

d) En déduire $(f^{-1})'(x)= \frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$ pour tout $x \in]\frac{1}{2},1]$.

EXERCICE 6 :

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x)= \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)= \frac{x^2+1}{2(1-x^2)^2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$ pour tout $x \in]0,1[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

www.devoirat.net 2017

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (qu' on notera f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x appartenant à J.

EXERCICE 7 :

Soit la fonction f définie sur [0,2] par $f(x)=3-\sqrt{4-x^2}$; C_f étant la courbe de f dans un repère orthonormé

1) a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f a droite en 0 et a gauche en 2

b/ En déduire une interprétation graphique pour chaque résultat

2) Montrer que f est dérivable sur [0,2[et que $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ pour tout $x\in]0,2[$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) a/ Montrer que f réalise une bijection de [0,2] sur un intervalle K que l'on précisera.

b/ Montrer que f^{-1}est dérivable à gauche en 3 mais elle ne l'est pas a droite en 1.

c/ Montrer que la fonction f^{-1}est dérivable sur l'intervalle]1,3]

d/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in[1,3]$.

EXERCICE 8 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $x\in[0,+\infty[$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall x\in]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

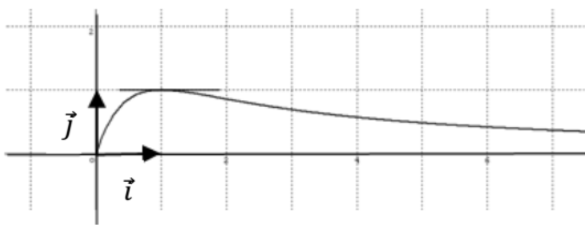
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur l'intervalle J. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

c) Montrer que $f^{-1}(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$ pour tout $x\in]-1,1]$

EXERCICE 9 : (QRM)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.
La courbe représentative de sa fonction dérivée f' dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est donnée par le graphique ci-contre.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



a/ f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

b/ Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

c/ $\mathscr{C}$ a une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.