

EXERCICE 1 :

L'espace \mathcal{E} étant muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 1, 0)$, $B(4, 1, -1)$ et $C(0, -1, -1)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan P.

1) Soit la droite D :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - 6t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Montrer que $D \perp P$ et déterminer leur point d'intersection K.

- 2) a) Vérifier que le point $E(1, -2, 0)$ n'appartient pas au plan P.
- b) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur P.

EXERCICE 2 :

Dans l'espace \mathcal{E} muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A $(2, 0, 2)$ et les plans (P) : $2x - y + 4z - 11 = 0$ et (Q) : $x - 2y - z - 1 = 0$.

- 1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
- b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D.

2) Soit la droite Δ définie par :
$$\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

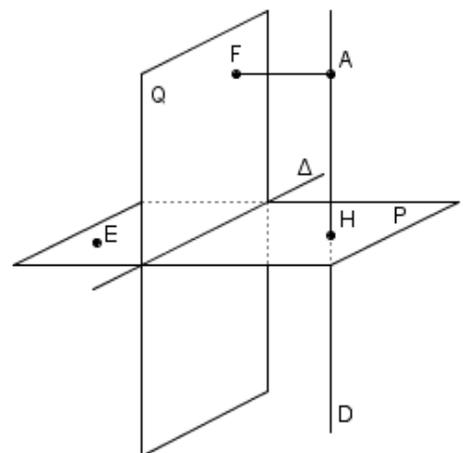
- a) Etudier la position relative des droites D et Δ .
- b) Déterminer une équation du plan (R) contenant la droite D et parallèle à la droite

EXERCICE 3 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la droite D définie par le

système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

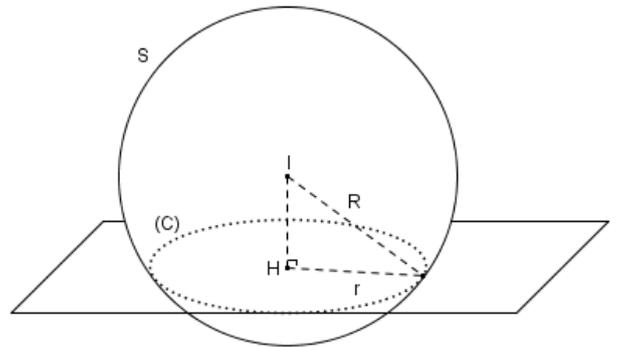
- 1) Vérifier que la droite D passe par le point $A(3, 2, 1)$ et en donner un vecteur directeur \vec{u} .
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $E(0, 2, 1)$ et perpendiculaire à la droite D.
- 3) a) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.
- b) En déduire la distance du point A au plan P.
- 4) Soit le plan Q d'équation : $x + y - z + 1 = 0$.
 - a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires.
 - b) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (qu'on notera Δ).
- 5) Calculer la distance d du point A au plan Q.
- 6) Soit F le projeté orthogonal de A sur le plan Q.
 Le plan (AFH) coupe la droite Δ en un point K.
 Calculer la distance AK.



EXERCICE 4 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

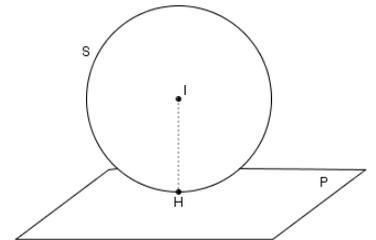
- 1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan qu'on notera P.
c) Montrer qu'une équation du plan P est $2x + y - 2z + 4 = 0$.
- 2) a) Vérifier que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.
b) Calculer le volume du tétraèdre OABC, puis sa hauteur issue de O.
- 3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 6$
a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.



EXERCICE 5:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(1,0,1)$ et $I(2,1,1)$.

- 1) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et passant par A.
- 2) Soit le plan P : $x+z-1=0$. Montrer que P est tangent à la sphère S, puis déterminer les coordonnées du point de contact.
- 3) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à la sphère S au point A.
- 4) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S' de centre O et tangent au plan Q.



EXERCICE 6:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

- 1) a) Montrer que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (qu'on notera P).
- 2) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x + y + z - 1 = 0$
- 3) a) Montrer que les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires.
b) Calculer le volume V du tétraèdre ΩABC , puis calculer sa hauteur issue de Ω .
- 4) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle C circonscrit au triangle ABC.
- 5) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1,2,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
a) Ecrire une équation cartésienne de S.
b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle C.
c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle C.

EXERCICE 7: (BAC 2012)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(2, 1, 1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(1, 0, 1)$.

- 1) a) Montrer que les points A,B et C déterminent un plan que l'on notera P.
b) Vérifier que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.

- 2) Soit le point $D(2, 0, 0)$
- Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 - Calculer le volume ϑ du tétraèdre ABCD.
- 3) Soit $I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On désigne par (S) la sphère de centre I et passant par D.
- Montrer que la sphère (S) passe par les points A et B.
 - En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).
 - Justifier que (C) est circonscrit au triangle ABC.
- 4) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.
- Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ .
 - Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle (C).
 - Soit D' le symétrique de D par rapport à Ω .
Montrer que le volume ϑ' du tétraèdre $D'ABC$ est égal à ϑ .

EXERCICE 8: (BAC 2014)

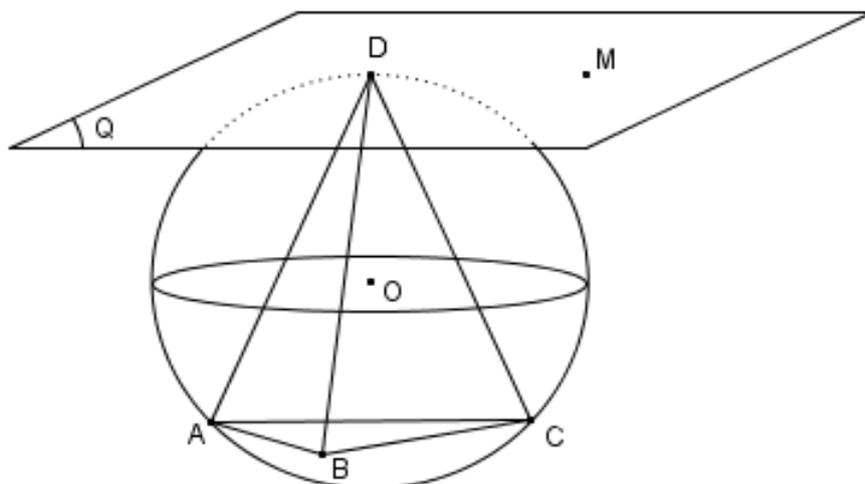
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(1, 2, 0)$.

- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
 - Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$
- Soit la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
 - Vérifier que les points A, B et C sont des points de la sphère S.
 - Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.

3) Soit le point D de coordonnée $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

- Déterminer une équation cartésienne du plan Q.
 - Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.
- 4) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.
- Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}$
 - Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$
 - En déduire que pour tout point M du plan Q ; $V = \sqrt{\frac{5}{3}} - 1$



EXERCICE 9: (BAC 2016 SESSION PRINCIPALE)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(-2, 1, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

1) a - Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b - Dédurre que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x - z + 1 = 0$.

2) On considère les points $I(1, -1, -1)$ et $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a- Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b- Calculer la distance IJ.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b- Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on considère le point $N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3)$.

a- Vérifier que N est un point de la sphère S.

b- Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c- Montrer que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AN} = -5 - \cos\theta$.

d- En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre ABCN est minimal.

EXERCICE 10: (BAC 2016 SESSION DE CONTRÔLE)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$.

1) Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ est égal à :

- a) $-8\vec{k}$ b) $-8\vec{i}$ c) $-8\vec{j}$

2) Soit P le plan (FHC). La droite (BD) est :

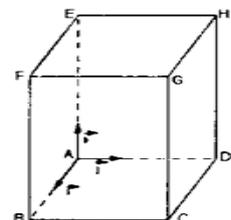
- a) Strictement parallèle à P b) Perpendiculaire à P c) Contenue dans P

3) Le produit mixte $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG})$ est égal à :

- a) 0 b) -24 c) 24

4) L'intersection de la sphère S de centre A et de rayon 4 avec le plan Q d'équation cartésienne $y = 3$ est le cercle :

- a) de centre C et de rayon $\sqrt{7}$. b) de centre D et de rayon $\sqrt{7}$. c) de centre D et de rayon 4.



EXERCICE 11: (BAC 2015 SESSION PRINCIPALE)

I) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1, 0, -1)$, $B(0, 2, -2)$ et le plan $P: x - 2y + z + 6 = 0$.

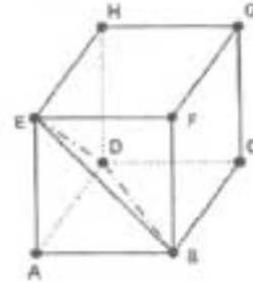
La droite (AB) est :

- a) Strictement parallèle au plan P b) sécante avec le plan P c) incluse dans le plan P.

II) Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

Le volume du tétraèdre EABD est égale à :

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$



III) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la sphère S de centre

O et de rayon 2 et le plan Q d'équation : $x + y + z - 3 = 0$.

On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan Q.

1) Les coordonnées du point H sont :

- a) $(1, 1, 1)$ b) $(-1, -1, -1)$ c) $(3, 0, 0)$

2) L'intersection du plan Q avec la sphère (S) est :

- a) Le vide b) Un cercle c) Un point.