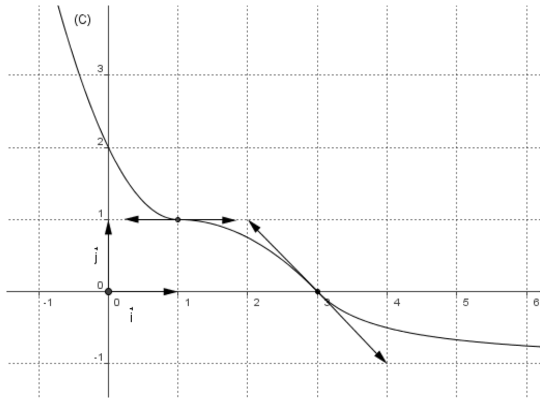
LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « 4ème Sc. Techniques »	**SERIE D'EXERCICES N°8** *Dérivabilité et fonction réciproque*

EXERCICE 1 :



La courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur IR, telle que :

- Au V($-\infty$) la branche infinie est parabolique de direction celle de (O, $\vec{j}$).
- Au V($+\infty$) la droite D : y= -1 est une asymptote.
- L'unique tangente horizontale est au point A(1,1).

1) Déterminer $f'(1)$, $f'(3)$

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Déterminer $f^{-1}(0)$. Montrer que f^{-1}est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.

c) Déterminer $f^{-1}(1)$. La fonction f^{-1}est elle dérivable en 1 ? (Justifier votre réponse)

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1} et tracer sa courbe (C') dans le même repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur IR par f(x)= $(x-1)^3+2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etablir le tableau de variation de f.

2) Montrer que C_f admet un point d'inflexion qu'on précisera les coordonnées.

3) Etudier les branches infinies de la courbe C_f.

4) Tracer la courbe C_f.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Déterminer $f^{-1}(2)$. La fonction f^{-1} est elle dérivable en 2 ? Justifier.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J puis calculer $(f^{-1})'(3)$.

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en (-1). En déduire une interprétation géométrique.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g^{-1} sur J.

c) Calculer g(1). En déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

d) Expliciter g^{-1}(x) pour tout x ∈ J

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(\mathrm{x})=\sqrt{\frac{\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}^2}}$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{2(1-x^2)^2\sqrt{\frac{\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}^2}}}$ pour tout $x\in]0,1[$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (qu' on notera f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

   b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

   c) Expliciter $f^{-1}(\mathrm{x})$ pour tout réel x appartenant à J.

EXERCICE 5: (A la maison)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(\mathrm{x})=\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{x}}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(\mathrm{x})=\dfrac{-1}{2\mathrm{x}^2\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{x}}}}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

   c) En déduire que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

2) Montrer que l'équation $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $1<\alpha<\sqrt{2}$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

   b) Calculer $\mathrm{f}^{-1}(\sqrt{2})$. En déduire $(\mathrm{f}^{-1})'(\sqrt{2})$

   c) Expliciter $f^{-1}(\mathrm{x})$ pour tout $\mathrm{x}\in\mathrm{K}$.

5) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère.