LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« 4EME Technique 3 »

SERIE D'EXERCICES
Suites réelles

Bac 2014

EXERCICE N1 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

1) Calculer u_2 et u_3
2) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in IN^*$
3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite ℓ.

4) Soit $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in IN^*$ et on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n à l'aide de n. Puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   c) Montrer que $S_n = \frac{1}{4}[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n]$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

EXERCICE N2 : (BAC 2004)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈IN on a : $1 < u_n < 2$
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln(u_n - 1)$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ .Préciser son premier terme.
   b) Exprimer u_n à l'aide de n. Puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N3 :

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout n∈ IN^* $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Etablir pour tout n∈ IN^* la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En remarquant que $x.(\ln x)^n = x^2 \frac{(\ln x)^n}{x}$ montrer que
   $\frac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2 \frac{(\ln x)^n}{x}$ pour tout x∈ $[1, e]$.
   b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N4 :

On donne le tableau de variation de la fonction f : x ⟼ ln(x+3).

x	-3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1) Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans]1,2[.

2) Soit la suite réelle $(\mathbf{u_n})$ définie sur IN par :

$\mathbf{u_0}=1$ et $\mathbf{u_{n+1}}=f(\mathbf{u_n})$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{1} \leq \mathbf{u_n} \leq \mathbf{2}$. (On prend ln4≃1,4 et ln5≃1,6)

b) Montrer que la suite $(\mathbf{u_n})$ est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence)

c) En déduire que la suite $(\mathbf{u_n})$ est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout x ∈ [1,2], on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout n ∈ IN on a :

$|\mathbf{u_{n+1}} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|\mathbf{u_n} - \alpha|$

c) En déduire que pour tout n ∈ IN on a : $|\mathbf{u_n} - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$

d) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n}$

EXERCICE N5 :

On pose $u_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}dx$ pour tout $n \in IN^*$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que :

$2u_{n+1} = (n+1)u_n - e^{-2}$ pour tout $n \in IN^*$. En déduire que $u_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$.

b) On pose $= \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x}dx$. Calculer K.

3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0 \ \forall \ n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $\in IN^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N6 : (Bac 2011)

1) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $\in IN$, $0 < u_n < 3$

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = \frac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $w_n = 1 - v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^{n+1}\right]$.

c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.