LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: HANNACHI SALAH
« 4^{EME}TECHNIQUE »

SERIE D'EXERCICES N°1
Limites et continuité - Les nombres complexes

EXERCICE 1 :

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x-2\sin x$

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-2x\cos(3x)}{x^2+1}$

1) Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $\frac{2x+1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1-2x}{x^2+1}$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICE 3 :

1) Soit les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$

a) Calculer $f \circ g\,(3)$; $g \circ f\,(-2)$

b) Définir chacune des fonctions $f \circ g\,(x)$ et $g \circ f\,(x)$.

c) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0^+} g \circ f\,(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g \circ f\,(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f \circ g\,(x)$

2) Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{1-2x}\right)$

EXERCICE 4 :

Le tableau ci-contre est le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0} :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

1) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{1+x^4}{x+1}\right)$

2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1]$; $[-1,0[$ et $]0,+\infty[$

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions α et β dans IR\{0}

EXERCICE 5 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3-3x^2+1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
2) Montrer que l'équation $x^3 = 3x^2-1$ admet dans IR exactement trois solutions α, β et γ (dans cet ordre). Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et que $2 < \gamma < 3$.
3) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE 6 :

Soit les fonctions f et g définies respectivement sur IR et IR\{−1} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ \ x > 0 \\ f(x) = \frac{x+1}{2} & si\ \ x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x}{2x^2+x-1} & si\ \ x \neq -1\ et\ x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & si\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Montrer que f est continue sur IR.
3) Montrer que la fonction g o f est continue en 0.
4) Montrer que la fonction f o g est continue sur IR\{−1}

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f : $x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
f'(x)		$-$	‖
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x+4}\right)$

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x)= f(x)-x$

a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.

b) En déduire que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans $]-\infty,\frac{1}{2}[$.

Vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

EXERCICE 8 :

1) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2 + x^2\cos(\frac{\pi}{x}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

2) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet au moins une solution dans $]1\ ,\ 2[$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $2 - x^2 \leq f(x) \leq 2 + x^2$.

b) Montrer que f est continue en 0.

3) Montrer que f est continue sur IR.