

EXERCICE N1 :

A/ Calculer (au moyen d'une primitive) chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x + 3e^{2x}) dx ; \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1} dx ; \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} dx ; \int_0^1 x^2 e^{(x^3+1)} dx ; \int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x} dx$$
$$\int_1^{e-1} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx ; \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x+e^{-x}} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin 2x)^4 dx ; \int_0^1 \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx ;$$
$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx ; \int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx ; \int_0^1 \frac{(1+e^{-x})^2}{e^x} dx ; \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

B/ Calculer (au moyen d'intégration par parties) chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (1-x)e^x dx ; \int_1^2 x(\ln x)^2 dx ; \int_1^e (\ln x)^2 dx ; \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

C/ 1) Dresser le tableau de signes de l'expression : $f(x) = 2 - e^{1+x}$

2) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_{-1}^0 |f(x)| dx$ (indication : utiliser la relation de Chasles)

EXERCICE N2 :

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{12x+6}{(x+2)^2}$

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Calculer alors $\int_0^1 f(x) \cdot dx$

2) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

EXERCICE N3 :

Soit le réel $A = \int_0^1 e^x \sin(\pi x) dx$

1) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que : $A = \pi(e+1) - \pi^2 A$

2) En déduire la valeur de A .

EXERCICE N4 :

On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x)^2 e^x - 1$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire une interprétation géométrique.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = (x^2 - 1) e^x$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement trois solutions, dont l'une est nulle.

(On note α et β les deux autres solutions tels que $\alpha < \beta$)

b) Vérifier que $-2,6 < \alpha < -2,5$ et que $1,4 < \beta < 1,5$

4) Tracer la courbe (C).

5) Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, que : $\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx = 2e-5$

6) a) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) Calculer l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D : $y=x$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1$

EXERCICE N5 : (BAC SC. EXP. 2010)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} et de sa fonction dérivée f' .

1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' .

2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f(-1)$, $f'(-1)$.

3) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2e-5$.

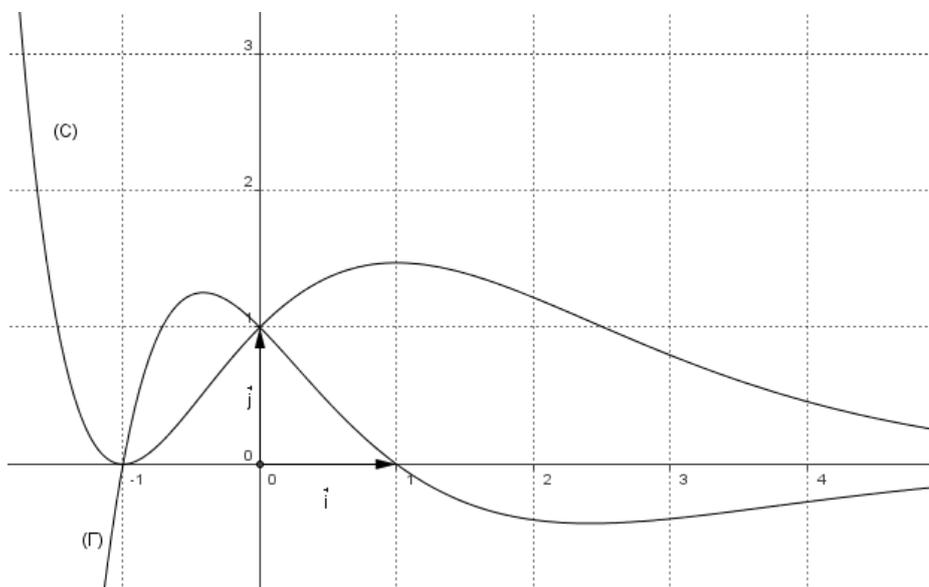
b) Déterminer l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1,41 < \alpha < 1,42$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).



EXERCICE N6 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = (\tan x)^3 + \tan x$.

La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y=x$.

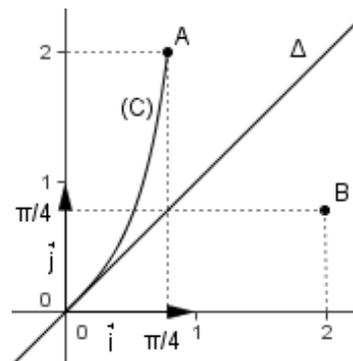
1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} .

c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$

3) Calculer (en unité d'aire : u.a) l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et le segment [AB].



EXERCICE N7 :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \cdot \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe selon un RON (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f , puis tracer la courbe (C). (l'unité : 2cm)

3) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{1+2e^3}{9}$

b) Calculer le volume V (en unité de volume) du solide engendré par la rotation autour de (O, \vec{i}) de la partie du plan limitée par (C), l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

EXERCICE N8 :

On pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de F .

b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto F(x) + F(-x)$ est constante sur \mathbb{R} . En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x) = F(\tan x) \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que $g(x) = x$

c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

3) a) Vérifier que F est la fonction réciproque de $f : x \mapsto \tan x$

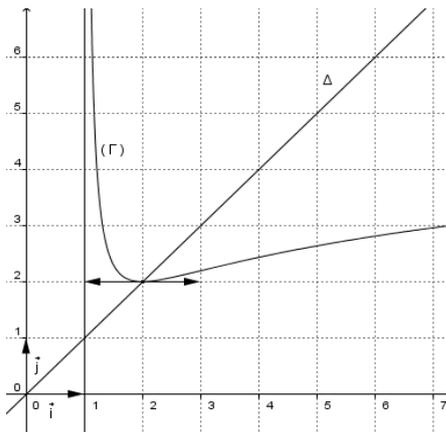
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

EXERCICE 9 :

A/ Dans le graphique ci-contre, la courbe (Γ) est celle de la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{ax}{x-1} + b \cdot \ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation $y=x$. L'unique tangente horizontale à la courbe (Γ) est au point $A(2,2)$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) En se servant des valeurs de $g(2)$ et $g'(2)$, montrer que $a=b=1$



3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$

b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ) , Δ et les droites d'équation $x=2$ et $x=e+1$

B/ Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O', \vec{u}, \vec{v}) .

1) Montrer que pour tout réel x de $]1, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de (C) .

5) Tracer la courbe (C) .

C/ Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1) dx$

1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1 .

b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$

c) Calculer le terme I_1 .

2) a) Montrer que pour tout réel x de $[2, e]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_2^e \left(\frac{x}{e}\right)^n \ln(x-1) dx \right)$

EXERCICE 9 :

Soit $g(x) = x + \ln(e^{-2x} + 1)$; $x \in [0, +\infty[$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) Etablir le tableau de variation de g .

2) Montrer que la droite $D : y=x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Etudier la position de (C) par rapport à D .

4) Tracer (C) et D .

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f .

6) a) Montrer que pour tout t de $[0, +\infty[$ on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

b) En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

c) En déduire un encadrement de $\ln(1+e^{-2t})$ pour tout t de $[0, +\infty[$.

7) Soit \mathcal{A}_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe (C) , la droite D et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$.

a) Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq \mathcal{A}_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$

EXERCICE 10 :

On donne le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+3)$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]1, 2[$.

2) Soit la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

x	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

- a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq 2$. (On prend $\ln 4 \approx 1,4$ et $\ln 5 \approx 1,6$)
 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence)
 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
 b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$
 c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
 d) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 11:

I/ Cocher la réponse exacte :

La suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x} e^x dx$ est une suite :

- a/ croissante b/ décroissante c/ stationnaire

II/ On pose $u_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer u_0 et u_1 .
 2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que :
 $2u_{n+1} = (n+1)u_n - e^{-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) En déduire que $u_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$.
 3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 4) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$
 c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N12: (BAC 2004)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$

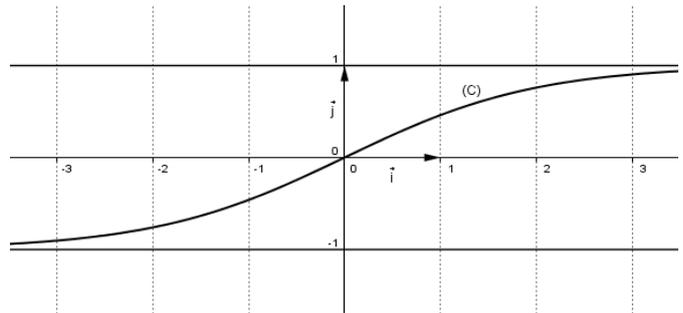
- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < u_n < 2$
 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 c) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.
 2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \ln(u_n - 1)$
 a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Préciser son premier terme.
 b) Exprimer u_n à l'aide de n . Puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 13 :

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) une fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{ae^x + b}{e^x + 1}$ où a et b sont deux réels.

Les droites d'équations : $y=1$ et $y=-1$ sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

(L'unité graphique : 2cm)



1) a) A l'aide d'une lecture

graphique déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) En déduire que : $a=1$ et $b=-1$.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$

b) Calculer, en cm^2 , l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

c) En déduire, en cm^2 , l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

EXERCICE 14 :

I/ Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g .

2) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x .

II/ Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{-x} + x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

2) a) Montrer que la droite $D : y=x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à D .

3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche infinie parabolique dont on précisera la direction.

4) Tracer D et (C).

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α .

b) En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

EXERCICE 15 :

Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g .

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β dans $]1, +\infty[$.

- b) On suppose que $\alpha < \beta$. Vérifier que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$
- 2) Etudier les branches infinies de (Γ) .
- 3) Montrer que la courbe (Γ) admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.
- 4) Tracer la courbe (Γ) .
- 5) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$
- b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par (Γ) , $\Delta : y=x$ et les droites d'équation $x=2$ et $x=e+1$

EXERCICE 16 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 - e^{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Etablir le tableau de variation de f
- 2) a) Montrer que la droite $D : y=x+1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(-\infty)$.
- b) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $(+\infty)$.
- 3) Tracer la courbe (C) et la droite D .
- 4) On désigne par P la partie du plan limitée par (C) , l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.
- a) En utilisant une intégration par partie, montrer que $\int_0^2 (x+1) e^{x-1} dx = 2e$
- b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de P autour de l'axe des abscisses.

EXERCICE 17 :

A/ Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $1 - 2e^{2x-2} \geq 0$
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement deux solutions α et 1 .
- Vérifier que $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^{2x-2}$ et la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- 4) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$
- b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n , on a :
- $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |u_n - \alpha|$$
- c) En déduire que pour tout entier naturel on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 18 :

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1) dx$

- 1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1 .
- b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$
- c) Calculer le terme I_1 .

- 2) a) Montrer que la suite (I_n) est croissante et à termes positifs.
 b) En déduire que (I_n) est convergente.
- 3) a) Montrer que pour tout réel x de $[2, e]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$
 c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n}$

EXERCICE N19 :

A/ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = 1 + x \ln(1+x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
 b) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 c) Dresser le tableau de variation de f .
 d) Etudier les branches infinies de (C).
- 2) Montrer que la partie de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$
 b) Tracer la droite $D : y=2$ et la courbe (C).
 4) Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites d'équations $x= \lambda$ et $x=0$.

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

B/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

- 1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera.
 2) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 3) Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?
 4) Montrer que pour tout $x \in [1, 2[$ on a : $g^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{x-1})$.

5) Montrer que $\int_1^5 g^{-1}(x) dx = \frac{5 \ln 2}{4} - A(-\ln 2)$

C/ Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx ; n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ puis calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{4}$

2) Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équation $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE N20 :

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
 2) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .
 3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En remarquant que $x \cdot (\ln x)^n = x^2 \frac{(\ln x)^n}{x}$ montrer que

$$\frac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2 \frac{(\ln x)^n}{x} \text{ pour tout } x \in [1, e].$$

b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE N21 :

1) Vérifier que pour tout réel non nul x , on a : $\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$

2) a) Calculer l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t-1} dt$

b) Calculer alors, l'intégrale

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t-1} dt$$

3) Soit l'intégrale $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t-1} dt$

Calculer l'intégrale $K-I$. En déduire la valeur de K .

EXERCICE N22 :

On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x)^2 e^x - 1$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (L'unité graphique : 1cm)

1) a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire une interprétation géométrique.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = (x^2 - 1) e^x$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement trois solutions, dont l'une est nulle.

(On note α et β les deux autres solutions tels que $\alpha < \beta$)

b) Vérifier que $-2,6 < \alpha < -2,5$ et que $1,4 < \beta < 1,5$

4) Tracer la courbe (C).

5) Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, que : $\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx = 2e - 5$

6) a) Calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) Calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite $D : y=x$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1$