# *Liste d'exercices n°1*

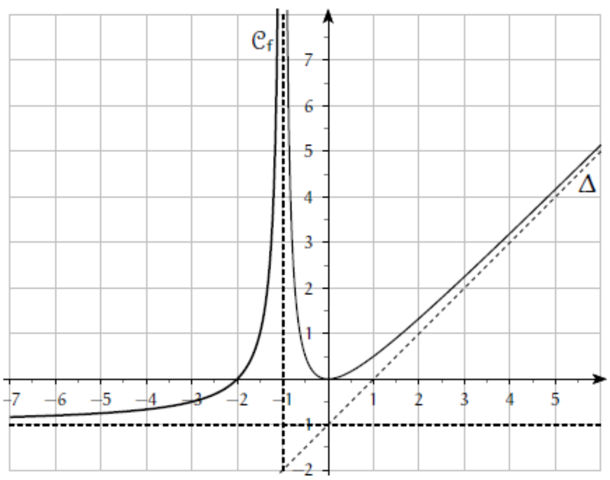
## *Limites et continuité*

**Exercice 1 :**

Soit la fonction $f$ définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1-cos(\pi x)}{x} \ si\ x < 0 \\ \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x \ si\ x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .
2. Montrer que : pour tout $x \in \left]-\infty, 0\right[$ on a :$\dfrac{x+2}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Monter que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ .
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au mois une solution dans $\left]\dfrac{-1}{2}, 0\right[$ .
   b) En déduire que $sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$ .

**Exercice 2 :**



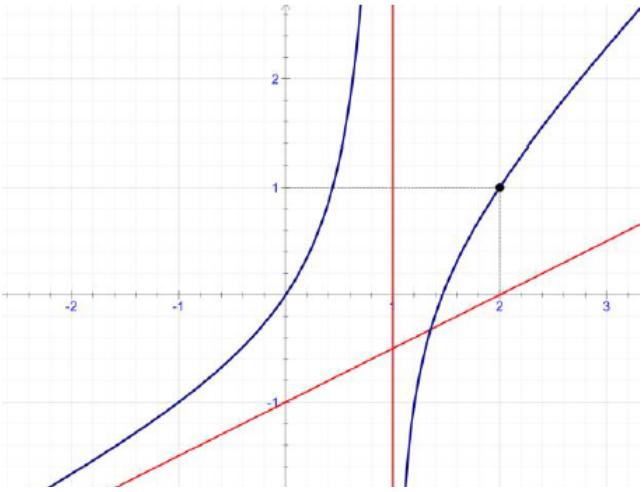

la courbe $\zeta_f$ représentée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ . On sait que :

- La droite $\Delta$ : $y = x - 1$ est une asymptote à $\zeta_f$ au voisinage de $+\infty$ .
- La droite $\Delta'$ : $y = -1$ est asymptote à $\zeta_f$ au voisinage de $-\infty$ .
- La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à $\zeta_f$ .

1. A l'aide du graphique et des renseignements fournis déterminer :
   a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x + 1)$ .
   b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ . En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(\dfrac{-x+1}{x+1})$ .
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ . En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x^2+1)}{x}$ .
2. Soit la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ .
   a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$ .
   b) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en $-1$ .
3. a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ f$ .
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f \circ f(x)}{f(x)}$ .

**Exercice 3 :**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ . La courbe $(C)$ est celle d' une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ .
La droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x - 1$ est une asymptote oblique à $(C)$ au voisinage de $-\infty$.
La droite d'équation : $x = 1$ est asymptote verticale.
$(C)$ représente une branche parabolique de direction $y = x$ au voisinage de $+\infty$.




1. Déterminer les limites suivantes :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)-x+2}$ .
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{x-1}{f(x)-1}$ .
2. Déterminer : $f(]-\infty, 1[)$ et $f(]1, 2])$ .
3. Soit la fonction $g$ définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x+1-cos(\pi x)}{x} \; si \; x < 0 \\ \\ g(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x \; si \; x \geqslant 0 \end{cases}$
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .
   b) Prouver que$g$ est continue en $0$ .
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g\circ\frac{1}{f(x)}$ .

**Exercice 4 :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}sin(\frac{\pi}{x})}{x-1} \; si \; x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \\ \\ \sqrt{x^2-2x} + x \; si \; x \leqslant 0 \end{cases}$

1. a) Encadrer f(x) pour tout $x \in ]0, 1[$ .
   b) Montrer alors que $f$ est continue en $0$ .
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .
2. On pose $u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$ ; $v(x) = \frac{sinx}{x}$ et $w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$
   a) Vérifier que $f(x) = w(x).v\circ u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ .
   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1 .
   c) Montrer que l'équation $sin(\frac{\pi}{x}) = 3(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$ admet dans $]1, 2[$ une solution $\alpha$ .