Lycée Secondaire El Ksour	Etude de Fonction Ln	Prof Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2015-2016	MATHÉMATIQUES	4 Sc I

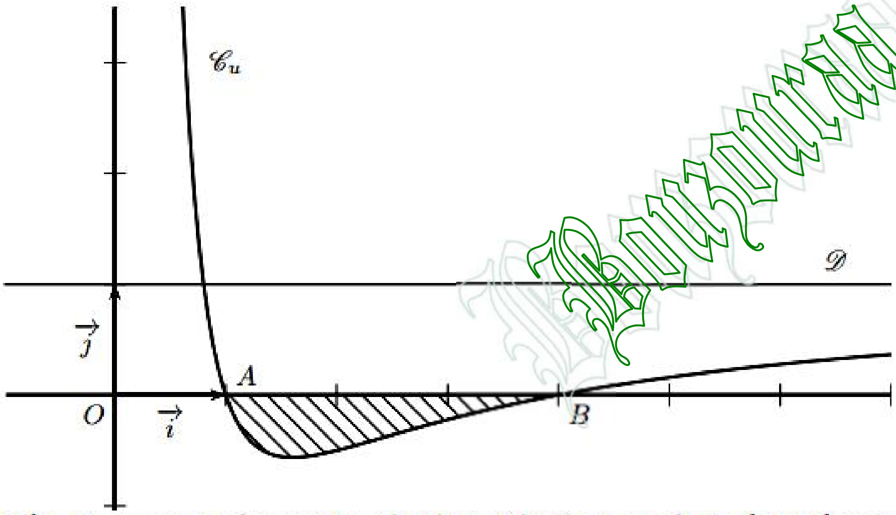
Exercice N°1

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1,0)$ et $B(4,0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1) Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

2) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}.$$

1) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Exercice N°2

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

www.devoirat.net 2016

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

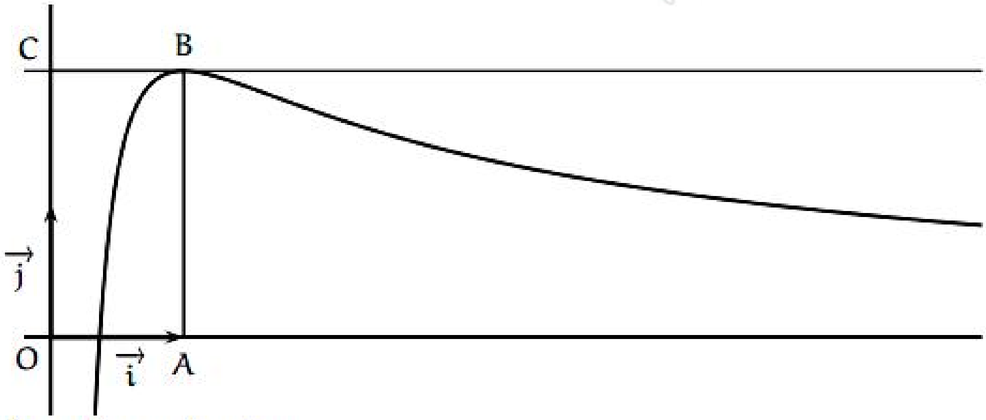
Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\, dx$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice N°3

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Bouzouraa Chaouki



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1) a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b - a) - b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b.

www.devoirat.net 2016

2) a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4) Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Exercice N°4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

1) a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Bouzouraa Chaouki
www.devoirat.net 2016

Exercice N°5

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Partie A : étude de la fonction f_1

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

b) Etudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2) En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : étude de la suite (I_n)

1) Soit n un entier naturel non nul.

a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.

b) Emettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n).
Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2) a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3) Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0,1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

Exercice N°6

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Bouzouraa Chaouki
www.devoirat.net 2016

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

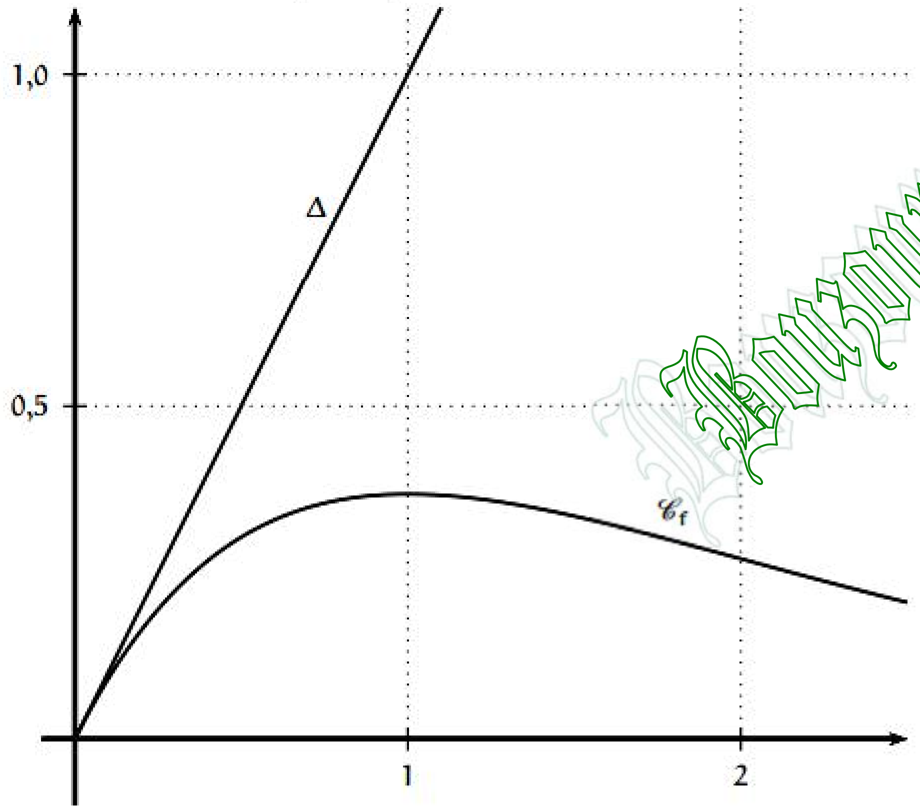
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



Bouzouraa Chaouki

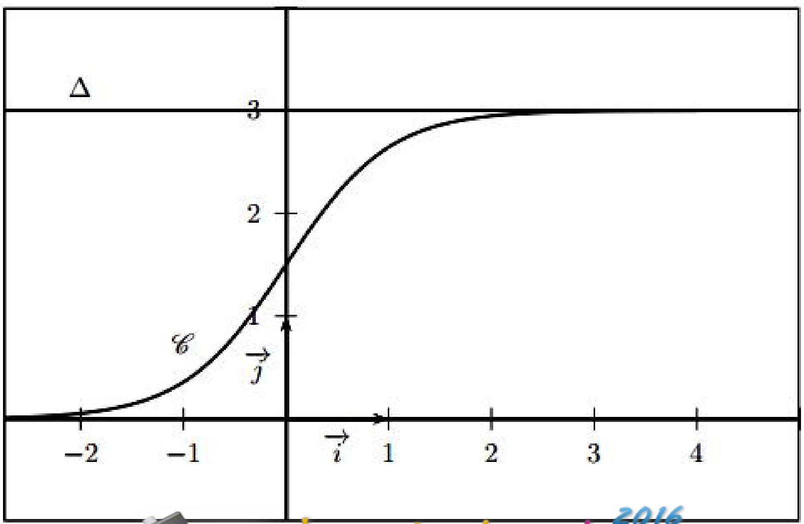
Exercice N°7

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



www.devoirat.net 2016

1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1) Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx$.

b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Exercice N°8

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1) permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

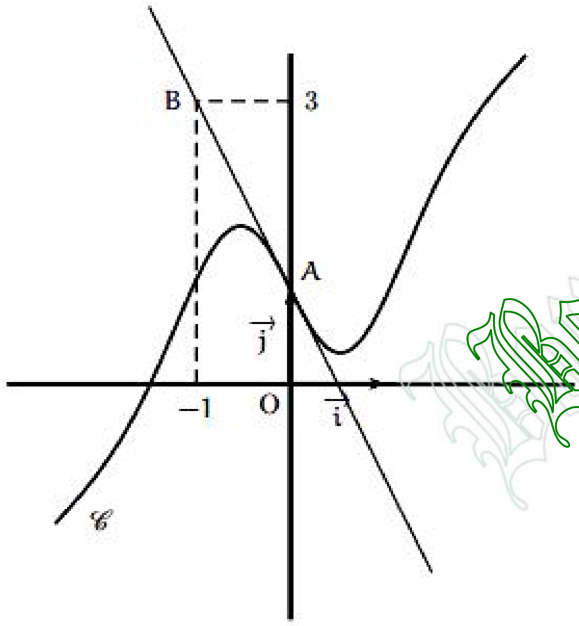
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Bouzouraa Chaouki

Exercice N°9

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (−1 ; 3).



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1) a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

c) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
Déterminer la valeur du réel a.

2) D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1 ; 0]$, $f(x) > 0$.

b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

c) Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$.

3) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

a) Ecrire $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

b) On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,dx$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

www.devoirat.net 2016

Exercice N°10

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2) Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b) Justifier que, pour tout réel non nul x, $h(x) = x\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e) En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3) Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Bouzouraa Chaouki

www.devoirat.net 2016