2015/2016

SERIE D'EXERCICES N3

Limites - Continuité - Dérivabilité

EXERCICE 1 :

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{x+1}{2x^2+4x-6}$; $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+x-6}{2x^2+4x-6}$; $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+3x-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{4x^2+x}+2x]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{4x^2+x}+x]$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-1}{\tan^2 x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x+2\sin x$

Montrer que pour tout réel x, on a : $3x-2\leq f(x) \leq 3x+2$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 3 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1-2x\cos(3x)}{x^2+1}$

Montrer que pour tout réel $x< 0$, on a : $\frac{2x+1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1-2x}{x^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICE 4 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)+2 & \text{si } x<0 \\ f(x) = \frac{2-x^2}{1+x^2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a : $2x+2\leq f(x) \leq 2$
2) Montrer que f est continue en 0.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ (On pourra poser $t=\frac{1}{x}$).
4) Etudier les branches infinies de (C) (la courbe de f dans un repère orthonormé).

EXERCICE N5:

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2-1}-1} & \text{si } x<-1 \\ f(x) = 2x & \text{si } -1\leq x<1 \\ f(x) = x-2+\sqrt{x^2+2x+6} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en (-1) et en 1.
2) Montrer que la fonction f est continue sur IR.

EXERCICE N6:

1) Soit les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$
   a) Calculer f o g (3) ; g o f (-2)
   b) Définir chacune des fonctions f o g (x) et g o f (x).

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f\circ g(x)$

3) Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{1-2x}\right)$

<u>EXERCICE N7:</u>

Dans chacun des cas suivants, en utilisant une comparaison convenable déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$: a) $f : x \longmapsto \frac{1+2\cos(3x)}{x^2+1}$ b) $f : x \longmapsto \frac{3x^2-\sin(\pi x)}{x+2}$

<u>EXERCICE N8 :</u>

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0}:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f		↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	
	$-\infty$						$-\infty$

Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\frac{1+x^4}{x+1}\right)$

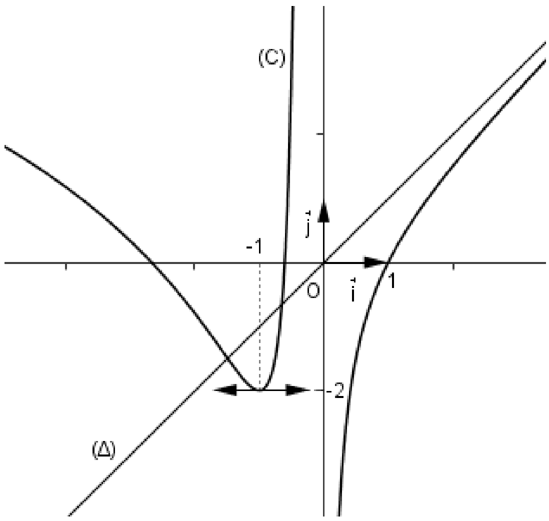
<u>EXERCICE N9</u> :

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} x.\sin\frac{2}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)\tan\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2.(\cos x - 1)$

<u>EXERCICE N10</u> :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur IR*, les droites (Δ) : y=x et l'axe $(O,\vec{j})$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au v($-\infty$)une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$.



1) Dresser le tableau de variation de f. (On demande les limites aux bornes et le signe de f '(x))

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-x]$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

3) Déterminer le nombre de solutions dans IR* de chacune des équations suivantes : f(x)=0 et f(x)=x

4) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x-2\cos(\pi x)}{x-2} & \text{si } x \le 1 \\ g(x) = \frac{6(2-\sqrt{x^2+3})}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note h la fonction définie par : h=gof

a) Montrer que $\frac{x+2}{x-2} \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \leq 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

c) Montrer que la fonction g est continue en 1.

d) Montrer que la fonction h est continue sur$]0,+\infty[$.

EXERCICE N11 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans $[0,2]$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution γ dans $[2,+\infty[$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans IR exactement trois solutions α, β et γ.
Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et que $2 < \gamma < 3$.
b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE N12:

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $x \in]1, +\infty[$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les branches infinies de (C).

2) a) Montrer que f est dérivable sur$]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.
b) Etablir le tableau de variation de f.

3) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x)=f(x)+x$
a) Montrer que $g(]1, +\infty[)=IR$
b) En déduire que l'équation $f(x)=-x$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$.
c) Vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

EXERCICE N13:

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$. Soit la fonction g définie sur$]-\infty, \frac{1}{2}[$ par : $g(x)=f(x)-x$

1) a/ Montrer que la fonction f est continue sur$]-\infty, \frac{1}{2}[$.
b/ Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur$]-\infty, \frac{1}{2}[$.
c/ En déduire l'image par f de l'intervalle [-4,0].

2) a/ Déterminer $g([-4,0])$
b/ Montrer alors que l'équation $f(x)=x$ admet une solution α dans l'intervalle [-4,0].
c/ Vérifier que : $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

3) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$